Die Schönheit der Mathematik

Thomas Weth

Der Gedanke, dass sich Schönheit und Ästhetik zumindest teilweise mathematisch erfassen und beschreiben lassen, mag vielleicht gewöhnungsbedürftig erscheinen, hat sich aber mittlerweile verbreitet und findet breite Akzeptanz; man denke hier etwa an messbare Proportionen allgemein als „schön“ empfundener Gesichter oder Körper, an Bauwerke, die nach den Proportionen des „goldenen Schnitts“ errichtet sind und dgl. mehr. Von der Beschreibung von Schönheit *durch* Mathematik soll aber im Folgenden *nicht* die Rede sein. Der Blick soll vielmehr auf die „Schönheit der Mathematik“ oder noch deutlicher auf die „Schönheit *in der* Mathematik“ gerichtet werden. Denn so seltsam es einem Nichtmathematiker auch erscheinen mag, beschreiben Mathematiker viele ihrer Theorien, Sätze und Beweise mit Adjektiven, welche man ansonsten eher in künstlerischen oder musischen Bereichen erwarten würde, wie z. B. wenn von der „Eleganz eines Beweises“, „Schönheit eines Satzes“ usw. die Rede ist. Einer der berühmtesten Zahlentheoretiker des 20. Jahrhunderts, G. H. Hardy, erhebt „Schönheit“ sogar zum Kriterium, ob etwas „gute“ Mathematik sei, denn seiner Meinung nach müssen „die Werke des Mathematikers ... schön sein wie die des Malers oder Dichters; die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte. Schönheit ist die erste Prüfung: es gibt keinen Platz in der Welt für hässliche Mathematik.“

Wie immer, wenn von Schönheit, Kunst, Ästhetik u. a. die Rede ist, gehen aber die Meinungen darüber auseinander, ob und warum etwas schön, kunstvoll, ästhetisch ist; eine Wagneroper ist für den einen höchster Kunstgenuss, dem anderen – so etwa dem berühmten amerikanischen Erzähler Mark Twain – bereitet sie fast schon physische Schmerzen. Twain hatte beim Besuch von Lohengrin in Bayreuth bereits vor der Pause „... soviel durchgemacht, dass all meine Lebensgeister hin waren und ich nur noch einen einzigen Wunsch besaß, nämlich: in Frieden gelassen zu werden.... Ob [die deutschen Zuhörer] diesen Lärm von Natur aus schätzten oder ob sie durch Gewöhnung gelernt hatten, ihn gern zu haben, wusste ich zu der Zeit nicht.“ Naturgemäß sind also auch die Meinungen über die Schönheit in der Mathematik geteilt, denn „... wie für so manches gilt auch für eine mathematische Theorie: Schönheit lässt sich wahrnehmen, aber nicht erklären“ (Arthur Cayley). Und die Schönheit der Mathematik wahrnehmen zu können, scheint „im Normalfall“ schwieriger zu sein als die Empfindung von Schönheit in Malerei oder Musik, denn obwohl „die Mathematik, recht betrachtet,... nicht nur Wahrheit, sondern auch höchste Schönheit [besitzt]“, ist diese „... eine kalte und strenge Schönheit gleich einer Skulptur, ohne Anziehungskraft für irgendeine unserer schwächeren Seiten, ohne die prächtigen Anreize der Malerei oder der Musik, aber von erhabener Reinheit und einer strengen Vollendung, wie sie nur höchste Kunst aufweisen kann“ (Bertrand Russell).

Der Versuch, die der Mathematik innewohnende Schönheit einem breiteren Publikum mit einfachen Mitteln vor Augen zu führen, ist von vornherein zum Scheitern verurteilt, wenn der Leser seinen oben angedeuteten Sinn für „kluge Gedanken“, „überraschende Wendungen“, ... verschließt. Vergleichbar wäre ein „sich Sperren“ mit dem Versuch, ein klassisches Konzert zu genießen, während man sich die Ohren zuhält.

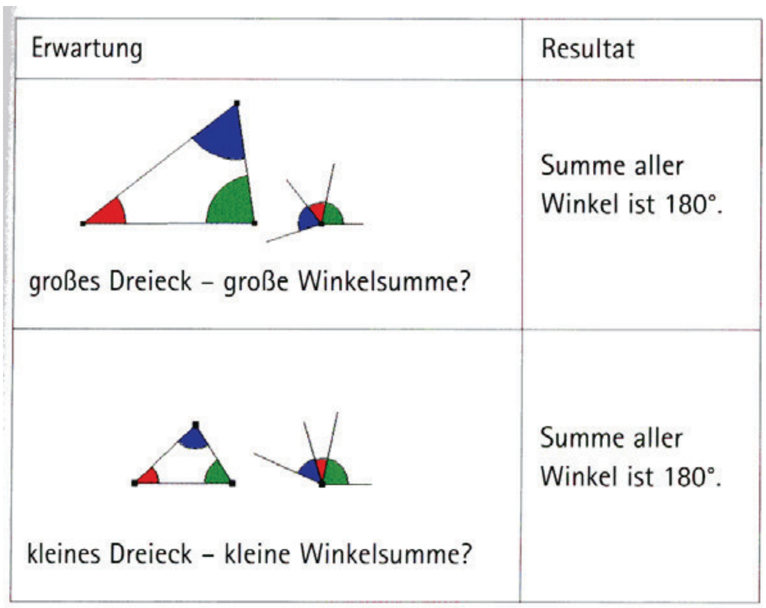
Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sollen nun die folgenden Beispiele spürbar machen, was mathematisch als „schön“ gilt, wobei der Begriff der mathematischen „Schönheit“ ausdifferenziert werden soll in „Eleganz“, „Ergriffen sein/Staunen“, „überraschend“, wobei die Grenzen zwischen den genannten Kategorien fließend sind bzw. die genannten Bereiche sich teilweise überdecken.

„Eleganz“ in der Mathematik

Eleganz ist gekennzeichnet von herausragender Gestaltung, manchmal Schlichtheit, zurückgenommenem künstlerischem Ausdruck (Minimalismus, Weniger ist mehr, z. B. wenige, ausgesuchte Farben, wenige klare visuelle Elemente, der Wahrnehmung angenehme Proportionen) Wikipedia

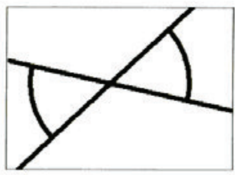
(„Eleganz“, 23.10.06)

Man stelle sich einen Wettbewerb vor, in dem derjenige siegt, der ein Dreieck mit größtmöglicher Innenwinkelsumme zeichnen kann. Ein erster (naiver) Versuch mag darin bestehen, ein kleines und ein großes Dreieck zu zeichnen und zu überprüfen, ob die Innenwinkelsumme im kleinen Dreieck wirklich kleiner ist als die des großen Dreiecks.

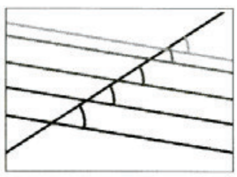


Erstaunlicherweise scheinen sich Dreiecke der Alltagserfahrung zu widersetzen: Egal wie groß ein Dreieck wird, die Summe seiner Innenwinkel bleibt anscheinend immer gleich groß! Und wie weitere Experimente zeigen: die Größe der Innenwinkelsumme scheint weder von der Größe der Dreiecke noch von der Form der Dreiecke abzuhängen. Im Alltag würde das in etwa dem Phänomen entsprechen, dass jedes Auto – unabhängig von der Leistungsstärke des Motors und seiner Ausstattung – gleich viel kostet.
Im Falle der Dreiecke ist mit den wenigen Beispielen allerdings zwar eine erstaunliche Vermutung nahe gelegt, aber noch lange kein Nachweis erbracht, dass bei jedem Dreieck die Innenwinkelsumme konstant ist. Und während uns im Alltag die Betrachtung von einigen wenigen Beispielen genügt, um ein annähernd zutreffendes Urteil zu fällen (wenn Bayern München die ersten 8 Liga-Spiele gewinnt, wird Bayern „sicherlich“ wieder Deutscher Meister), will die Mathematik *alle* Fälle absichern. Die Mathematik will zweifelsfreie Klarheit für *jeden nur denkbaren* Fall: Egal wie groß, egal wie klein, egal wie schief, egal wie: die Mathematik will beweisen, dass die Vermutung stimmt: „In *jedem* Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°.“
Das Problem ist also gestellt: Für unendlich viele Möglichkeiten soll zweifelsfreie Sicherheit gewonnen werden; ein für alle mal, unverrückbar, unbezweifelbar, endgültig.
Erstaunlich ist, dass es der Mathematik gelingt, bei zahllosen derartigen Problemstellungen eine Lösung zu finden. Und noch erstaunlicher ist, dass viele der Ideen, mit denen die jeweiligen Problemlösungen gelingen, einfach, einsichtig, prägnant oder kurz: „elegant“ sind: Im Falle des Innenwinkelproblems genügen drei Argumentationsschritte.

1. An einer Geradenkreuzung sind gegenüberliegende Winkel gleich groß.

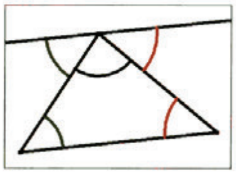


2. Verschiebt man eine Gerade h parallel zu sich selbst, so ändert sich der Schnittwinkel mit einer anderen Geraden nicht.



Mit dieser einsichtigen Erkenntnis gelingt nun der Beweis des Satzes: „In jedem Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°“ mit einer einzigen, geschickt eingezeichneten Linie. Sofort erkennt man, dass

3. die gleich markierten Winkel gleich groß sind und sich zu einem gestreckten (also 180°-) Winkel ergänzen.



Ergriffen sein von Mathematik

Die bisher beschriebene Eleganz ist nur ein Teil des Konzepts „Schönheit“. Minimalismus ist kein notwendiges MUSS, um Schönheit zu ermöglichen. Man denke hier an prunkvoll ausgestattete Barockkirchen oder an Werke, die von großen Orchestern gespielt werden. In diesen Fällen eröffnet sich die Schönheit eher in Form einer „Ergriffenheit“, welche einen Luft holen, tiefer atmen, das Herz schneller schlagen lässt. Ähnliche real körperliche Reaktionen rufen in manchen Fällen auch mathematische Resultate hervor. Nicht beim Ergebnis der Aufgabe „1 + 3 = ?“, sondern – bei entsprechender Sensibilität – etwa bei folgendem Beispiel:

Seit langem vermutet man von der Kreiszahl π (= 3,141592...), dass sie „normal“ ist, was heißt, dass jede gleichlange endliche Zahlenkombination (etwa 7558 oder 1234) mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Nachkommastellen von π auftritt. Ein Beispiel für eine – nachgewiesenermaßen – normale Zahl ist die

Champernowne-Zahl: 0, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ...

Vorausgesetzt, π sei normal, hat dies Konsequenzen, welche Erstaunen wecken und ergriffen machen: Eine erste Erkenntnis ist, dass in den Nachkommastellen von π *Ihr* persönliches Geburtsdatum vorkommt. Mit Sicherheit! Denn wenn Sie *Ihr* Geburtsdatum (etwa 13.3.82) in eine Zahl (13382) umwandeln, hat diese 5 Ziffern und kommt mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Nachkommastellen von π vor, wie jede andere 5-ziffrige Zahl, also wie etwa die ersten 5 Nachkommastellen 14159 (die mit Sicherheit vorkommen!). Die Suchmaschine *http://www.pisearch.de.vu/* liefert, dass 13382 an der 39277-ten Dezimalstelle in π auftritt bzw. beginnt.

In der Ausstellung „Ausgerechnet...“ finden Sie folgendes Bild:

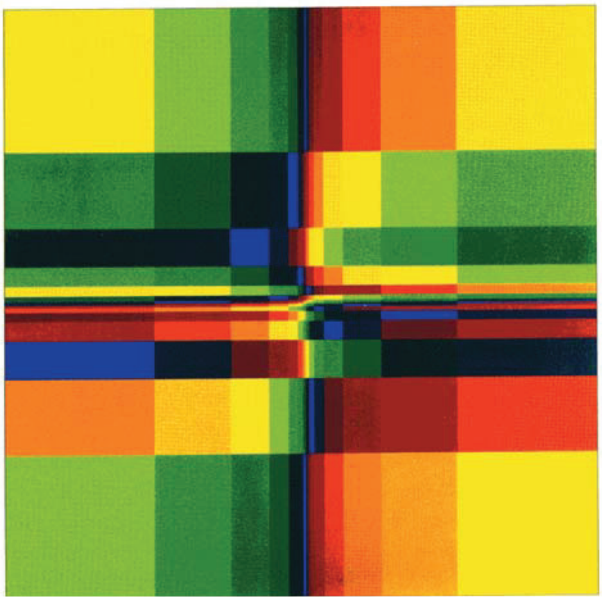


Abb. 1: Richard Paul Lohse, Fünfzehn systematische Farbreihen mit vertikaler und horizontaler Verdichtung, 1950-67 (Kat-Nr. 50, Seite 123)

Ein Digitalfoto dieses Bildes in der dargestellten Qualität benötigt einen Speicherplatz von etwa 10 kB, kann also durch eine Folge von etwa 80 000 Nullen und Einsen digitalisiert werden (etwa: 11100100010111.... 0010). Mit Sicherheit tritt also diese endliche „Zahl“ in den Nachkommastellen von π auf. Irgendwo „weit hinten“, aber ganz ganz sicher! Und die Sicherheit, dass π das hier dargestellte Bild „enthält“, bezieht sich auf *jedes beliebige Foto* bzw. Bild. So ist jedes nur denkbare Foto, sei es ein Michelangelo, ein Pollock, Ihr persönliches Passbild oder ein Bild Ihres persönlichen ersten Schultags in den Nachkommastellen von π „enthalten“! Wer von dieser „Allmacht“ von π noch nicht ergriffen ist, den möge folgende Überlegung überzeugen: Stellen Sie sich vor, ein Kameramann hätte seit Ihrer Geburt jeden Augenblick Ihres Lebens gefilmt; jede Sekunde, jeden Atemzug, Tag und Nacht ohne Pause, bis zu diesem Moment in dem Sie diese Zeilen lesen. Ihr Lebensfilm wird – z. B. für einen DVD-Player – digitalisiert und liegt damit in einer Folge von Nullen und Einsen, also einer (zugegebenermaßen „großen“ aber) endlichen Zahl vor. Und damit steckt Ihr persönlicher Lebensfiim in den Nachkommastellen von π Und nicht nur das; Ihr Film kommt in jeder erdenklichen Variante vor: Eine Variante zeigt original Ihr bisheriges Leben und dass Sie im jetzigen Moment die Lektüre dieses Artikels gelangweilt beenden. In einer anderen Variante zeigt sich original Ihr bisheriges Leben und dann, dass Sie von diesem Artikel so ergriffen sind, dass Sie dem Autor 1000 Euro überweisen ☺ !

Erstaunt sein über Mathematik

Von der Zahl 0,9999... nehmen meinen „Umfragen" nach min-destens 80 °/o der Befragten an, sie sei kleiner als 1. Ein Teil „Schönheit" in der Mathematik resultiert daraus, dass sie – ähnlich einem Fernrohr – einen Blick hinter den Horizont gewährt, der dem Menschen durch seine beschränkten Sinne bzw. durch seinen gesunden Menschenverstand gesetzt ist. Eine „schöne“ – aber falsche – Argumentation, dass 0,9999... eigentlich größer als 1 sein müsste, geht auf eine griechische Denkweise zurück: denn 0,99999... ist 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + ... D. h., es werden unendlich viele Summanden addiert, das Addieren geht in alle Ewigkeit so weiter. Was anderes als unendlich viel - so die Denkweise der Griechen - kann dann resultieren? Mit anderen Worten: 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + ... = 0,99999... = unendlich, also sicher *größer* als 1. Trotz der scheinbaren Kraft dieser Argumentation erweist sich, dass sie falsch ist, denn sie geht zu „sorglos“ mit dem Begriff „unendlich“ bzw. „unendlich oft“ und „unendlich viel“ um. Die „genaue“ Berechnung von 0,9999... ergibt trotzdem ein überraschendes und damit in diesem Sinne „schönes“ Ergebnis:

Wie man leicht nachrechnet, gilt:

$$\frac{1}{9} = 0{,}11111\ ...$$

Addiert man auf beiden Seiten noch einmal

$$\frac{1}{9} = 0{,}11111\ ...$$

erhält man

$$\frac{2}{9} = 0{,}22222\ ...$$

Addiert man so weiter erhält man

$$\frac{3}{9} = 0{,}33333\ ...,\ \frac{4}{9} = 0{,}44444\ ... \text{ usw. bis schließlich}$$

$$\frac{8}{9} = 0{,}88888\ ... \text{ und letztlich: } \frac{9}{9} = 0{,}99999\ ...$$

Und an diesem Ergebnis ist nicht zu zweifeln. Allerdings ergibt die linke Seite der letzten Gleichung den Wert 1, wie elementare Bruchrechnung (Kürzen) zeigt und man hat das für Viele überraschende Resultat, das dem gesunden Menschenverstand so völlig zu widersprechen scheint:

$1 = \frac{9}{9} = 0{,}99999 \ldots$

Geniales in der Mathematik

Als schön gelten in der Mathematik nicht zuletzt intelligente Überlegungen, welche nicht so „nahe“ liegen, als dass man auf sie letztlich durch Fleiß auch selbst kommen kann, sondern zu denen man „geniale“ Einfälle (vgl. oben etwa den Beweis zur Innenwinkelsumme im Dreieck) benötigt, also Überlegungen, die einen genialen Verstand voraussetzen. Einer dieser Beweise (der bei einer Umfrage unter Mathematikern zu den Top-Ten der mathematischen Beweise gewählt wurde) soll hier (nicht in allen technischen Details) skizziert werden.

Jeder lernt in der Schule, was eine Primzahl ist, nämlich eine Zahl, welche genau durch 2 (verschiedene) Zahlen teilbar ist: durch sich selbst und die Zahl 1. Damit ist z. B. 3 eine Primzahl, 5 ebenso oder die 101. Keine Primzahlen dagegen sind die 1 (da sie nur einen Teiler – nämlich die 1 – hat) oder die 6 (= 3 • 2). Kaum jemand wird bezweifeln, dass es sehr viele Primzahlen geben mag, vielleicht sogar unendlich viele. Wie aber kann man sich dessen sicher sein? Wie *beweist* man *zweifelsfrei*, dass es sehr viele – was immer das sein mag – oder sogar unendlich viele Primzahlen gibt? Die Antwort gibt ein über 2000 Jahre alter „schöner“ Gedankengang zum Satz:

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

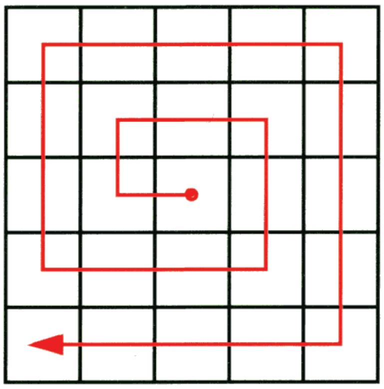
Zum Beweis nehme man an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, also etwa der Größe nach geordnet: 2, 3, 5, 7,...., p. Ohne uns mitzuteilen, warum und wozu, teilt uns Euklid – der Urheber dieses Beweises – dann seine geniale Idee mit: Man multipliziere alle diese Primzahlen miteinander und addiere schließlich noch die 1. Man erhält also die Zahl: $x = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p) + 1$.

Somit ist sicherlich 2 kein Teiler von x, denn ansonsten würde 2 ein Teiler von 1 sein.
Ebenso ist 3 kein Teiler von x, denn ansonsten würde 3 ein Teiler von 1 sein.
Ebenso ist 5 kein Teiler von x, denn ansonsten würde 5 ein Teiler von 1 sein, usw. bis schließlich p kein Teiler von x ist, denn ansonsten würde p ein Teiler von 1 sein.

Also ist x durch keine einzige Primzahl teilbar. Da x aber durch 1 und sich selbst teilbar ist, ist x eine Primzahl (oder durch eine Primzahl teilbar), die aber (da sie

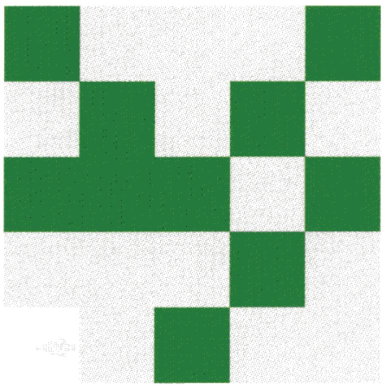
größer als p ist) nicht in der obigen „Menge aller Primzahlen“ enthalten ist. Die Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, führt also zu einem Widerspruch und muss dementsprechend falsch sein. Damit ist (durch einen sogenannten „indirekten“ Beweis) gezeigt: Die Annahme, es gäbe endlich viele Primzahlen, ist falsch. Entsprechend bleibt nur der Schluss: es gibt nicht nur endlich, sondern unendlich viele Primzahlen. Das wird in dem „Primzahlenbild 1-9216“ von Suzanne Daetwyler anschaulich dargestellt (siehe Abb. 2).
Derartige „trickreiche“ aber logisch korrekte Gedankengänge lesen sich für einen Interessierten wie für Andere ein logisch gut aufgebauter Kriminalroman; für den Interessierten bieten sie einfach einen Genuss und werden als „schön“ empfunden.

PRIMZAHLENBILD 1-9216 von Suzanne Daetwyler



13	14	15	16	17
12	3	4	5	18
11	2	1	6	19
10	9	8	7	20
	24	23	22	21

13	14	15	16	17
12	3	4	5	18
11	2	1	6	19
10	9	8	7	20
	24	23	22	21



Definition

Eine natürliche Zahl größer als 1 heißt Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Primzahlenfolge

Die ersten Primzahlen sind

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,...

Die Zahl 1 wird nicht zu den Primzahlen gezählt, da sonst einige Gesetzmäßigkeiten über Primzahlen nicht gelten würden bzw. anders formuliert werden müssten. Ein Beispiel ist die sogenannte „Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung“: Die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig. So ist beispielsweise

420 = 22357.

Würde man die Zahl 1 bei den Primzahlen zulassen, so gäbe es verschiedene Zerlegungen, z.B.

4 = 22 = 212 – 2112 = ...

Primzahlen können als grundlegende Bausteine (Atome) der natürlichen Zahlen angesehen werden.

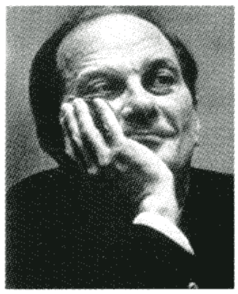
Die größte Primzahl

Bereits Euklid konnte vor rund 2300 Jahren beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Zwar werden heute mit Hilfe von immer schneller rechnender Computer stets neue Primzahlen gefunden, eine Formel zur Erzeugung von Primzahlen gibt es aber bisher nicht.

Anwendungen

Sehr große Primzahlen besitzen wichtige Anwendungsfelder bei Verschlüsselungsverfahren und Geheimcodes.

Ulams Spirale



Stanislaw M. Ulam (1909-1984)

Der polnische Mathematiker Stanislaw M. Ulam hörte im Herbst 1963 einen Vortrag, den er später als „lang und sehr langweilig“ beschrieb. Zur Ablenkung kritzelte er die natürlichen Zahlen im Gegenuhrzeigersinn, bei der Zahl 1 beginnend, spiralförmig auf ein kariertes Gitternetz. Als er dann die Primzahlen markierte, stellte er zum eigenen Erstaunen fest, dass sich diagonale Linienmuster ergaben. Sollte es etwa Regelmäßigkeiten in der Verteilung der Primzahlen geben? Seit dieser Zeit werden immer wieder Variationen der sog. „Ulam-Spirale“ untersucht, wenn es um Verteilungen von Primzahlen geht. Bekannt wurde S. M. Ulam durch sein Mitwirken an Optimierungsverfahren für Nuklearwaffen und die Entwicklung der Monte-Carlo-Methode.

Abb. 2: Die Tafel „Primzahlenbild 1-9216 von Suzanne Daetwyler“ wurde nach einer Konzeption von Prof. H.G. Weigand entworfen und im Layout von Jan Wörler umgesetzt.

Schlussempfehlung

Sollte auch nur ein einziges der oben genannten Beispiele beim Leser Interesse gefunden haben, ihm die Genugtuung verschafft haben, etwas verstanden, erkannt, über seinen bisherigen Horizont hinausgeblickt zu haben, so mag ich den Versuch, die Faszination, die Schönheit der Mathematik darzustellen, bereits als gelungen bezeichnen. Es mag aber sein, dass keines der oben genannten Beispiele den ein oder anderen Leser erreicht hat – sei es, weil er sie für banal oder einfach nur uninteressant fand. Dass es also nicht gelungen ist, etwas von der Schönheit einfacher aber intelligenter, eleganter, überraschender Gedanken und Überlegungen „rüber“ zu bringen. Für diejenigen sei mir abschließend der folgende (augenzwinkernd gegebene) Vergleich gestattet: Stellen Sie sich vor, Sie seien vor die Aufgabe gestellt, einem breiten Publikum die Schönheit der bildenden Künste alleine mit Hilfe von Kinderzeichnungen darstellen zu müssen. Sicherlich werden Sie mit von Kindern erstellten Bildern und Werken bereits den ein oder anderen Zuhörer erreichen. Allerdings „brennt“ es in Ihnen, „mehr“ bieten zu dürfen, Bilder „wirklich“ großer Maler zu präsentieren, über deren Maltechniken und kompositorischen Prinzipien zu referieren, um Ihr Publikum zu überzeugen.

Egal ob Sie nun zu Ersteren oder Zweiteren gehören mögen; in jedem Fall wird die Lektüre von „Erfahrung Mathematik“ (von Davis und Hersh) eine intellektuell bereichernde, „schöne“ Lektüre sein: für Erstere, da sie bereits ein Gespür für mathematische Schönheit entwickelt haben und für Zweitere, weil sie beim Lesen die Schönheit der Mathematik nicht „via Kinderbilder“, sondern an Hand „richtiger“ Mathematik vermittelt bekommen.

Literatur

Davis, Ph. J., Hersch, R., Erfahrung Mathematik, Birkhäuser Verlag, Basel 1985