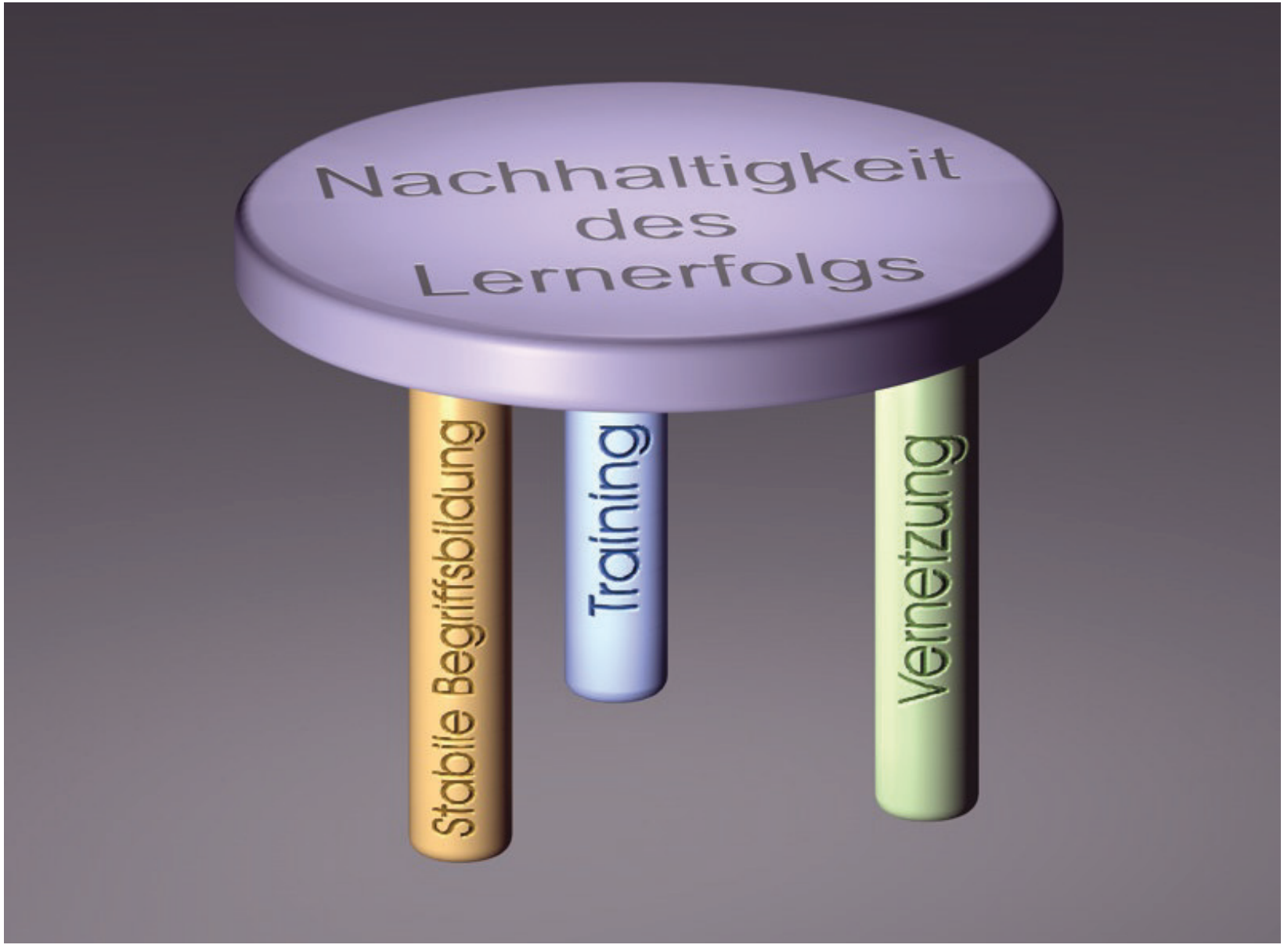
Zur Nachhaltigkeit des Mathematikunterrichts

Kolloquium EWF 2007

Mehr Übung?

Nachhaltigkeit des Lernerfolgs
Stabile Begriffsbildung
Training

Die drei Säulen nachhaltigen Lernens

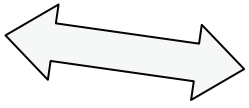


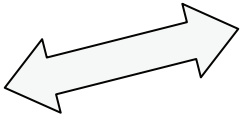
1. Säule: Stabile Begriffsbildung

Welche Möglichkeiten bietet der Unterricht für eine stabile Begriffsbildung?

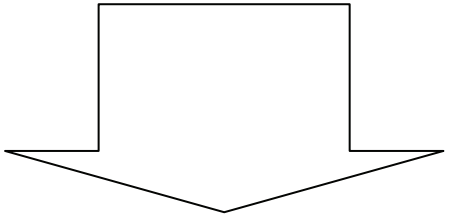
Inhalte aspektreich behandeln

Aspekte mit geeigneten Bildern eng verknüpfen





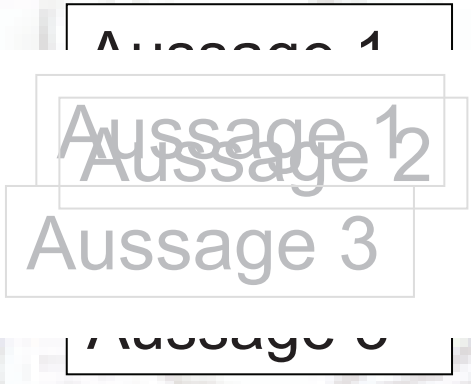
Schüleraktivität passend dazu wählen



Aspekte werden mit Bildern eng verknüpft memoriert

Vergessens- und Rekonstruktionsprozess

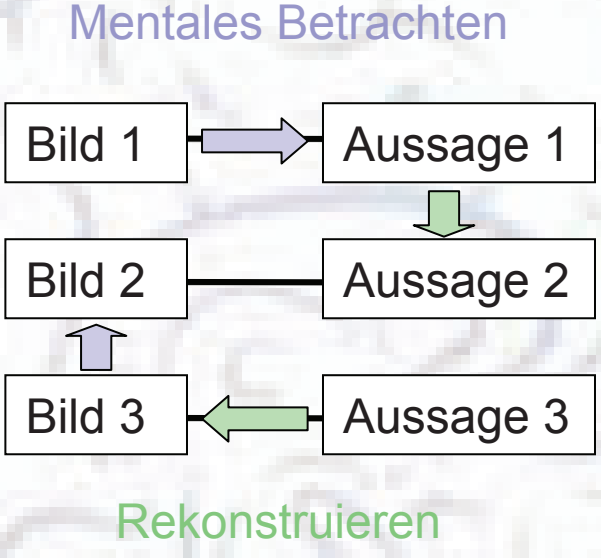
- *bei alleiniger Abspeicherung von Aussagen*



- Aussagen verblassen und interferieren
- Das Gelernte wird *nicht* oder *falsch* wiedergegeben

Vergessens- und Rekonstruktionsprozess

- *bei enger Verknüpfung mentaler Bilder und Aussagen*



- Auch hier finden ähnliche Vergessensprozesse statt
- Aber: Mentale Bilder und Aussagen stützen und kontrollieren sich gegenseitig
- Das Gelernte kann rekonstruiert und richtig wiedergegeben werden

Beispiel: Kreisflächenformel

- Beobachtung: Schüler verbinden mit $A=\pi r^2$ keine bildliche Vorstellung.
- Infolge dessen ergeben sich Schülerfehler:

  $A= 2\pi r$

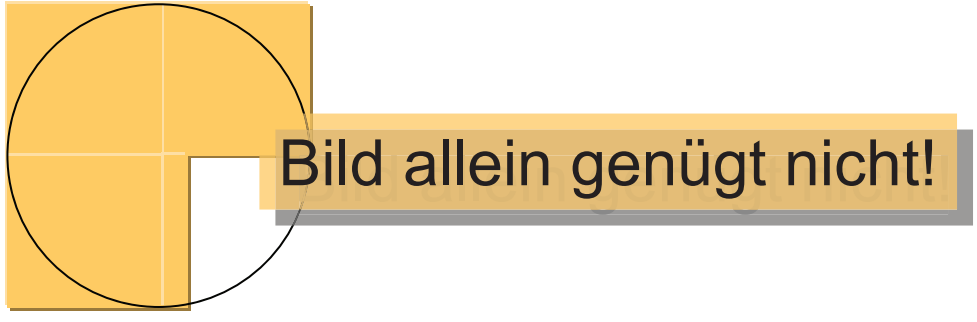
  $A= 2\pi r^2$

  $A= \pi$ bzw. $A= 2\pi$
- Dabei lässt sich die Formel leicht mit bildlicher Vorstellung verknüpfen:

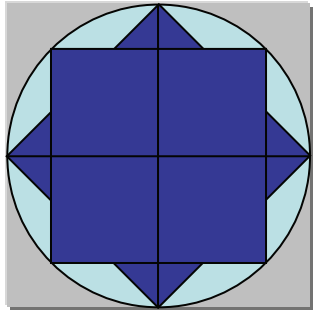
$A = \pi\ r^2$

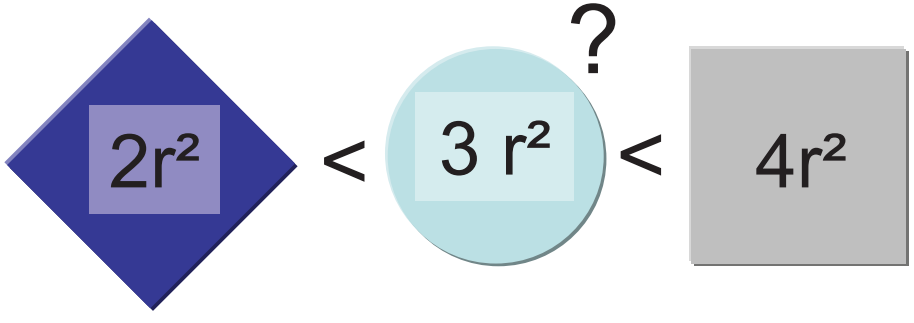
$A \approx 3{,}14\ r^2$

$A \approx 3\,{}^1\!/_7\ r^2$

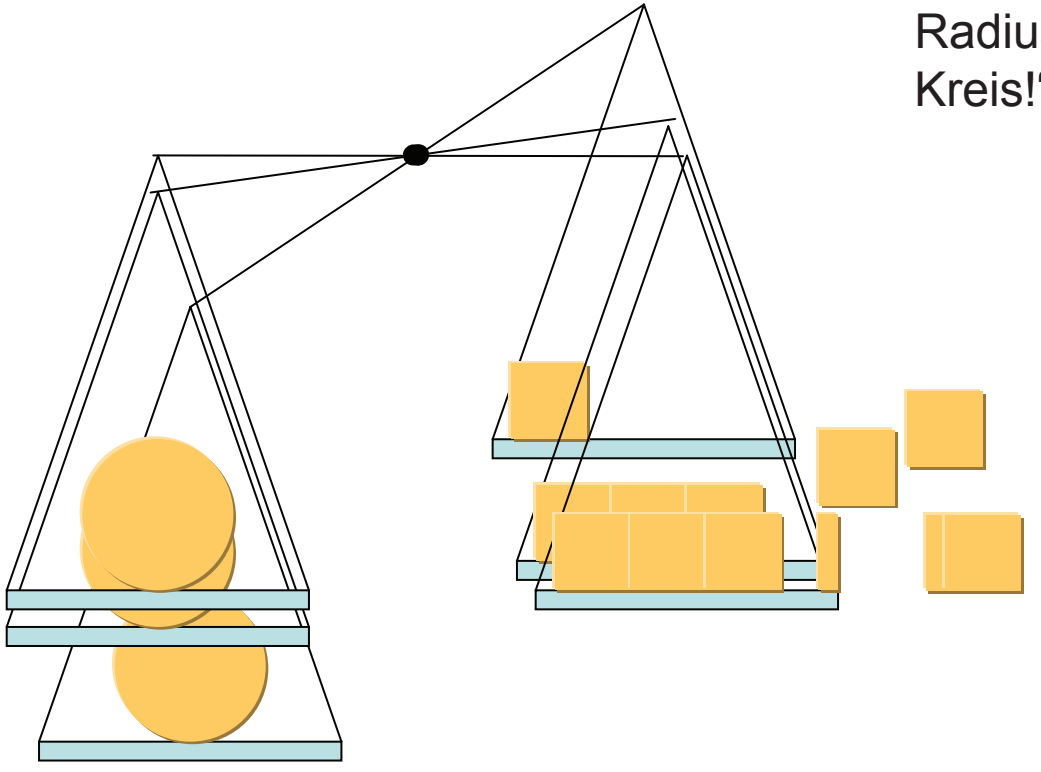


Unterrichtliches Vorgehen muss die Verknüpfung dieses Bildes mit der Formel vielfältig unterstützen!



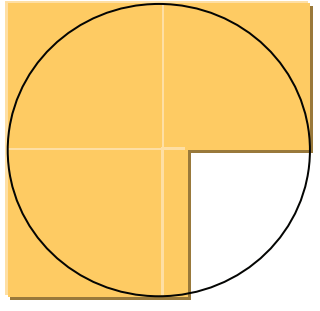


Passende Schüleraktivität



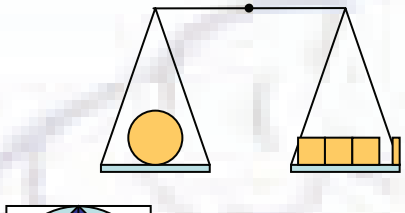
„Gut 3 - genauer 3,14 - Radiusquadrate entsprechen dem Kreis!“

$$A \approx 3{,}14\ r^2$$

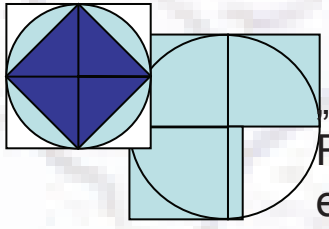


Stabile Begriffsbildung

Bilder, Aussagen, Formeln, Handlungen, im Gedächtnis eng miteinander verknüpft



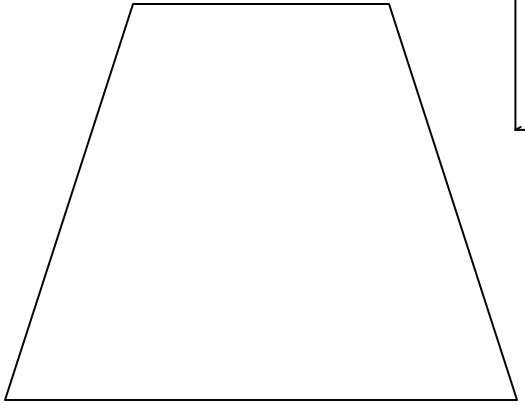
$A = 3{,}14\ r^2$

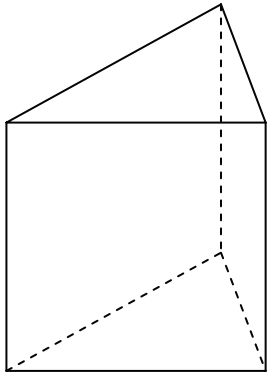


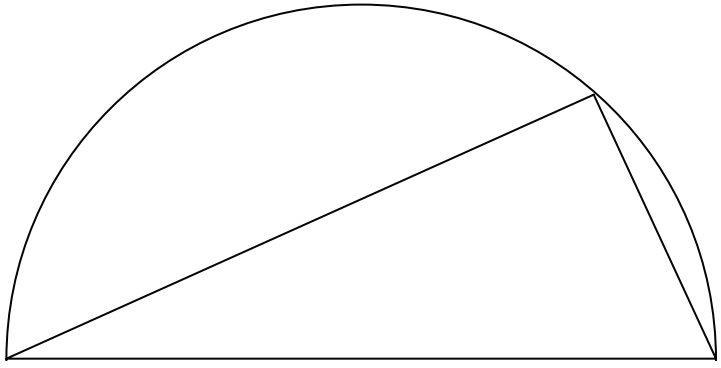
„Gut 3 - genauer 3,14 - Radiusquadrate entsprechen dem Kreis!“

Mentale Modelle beziehen sich auf Prototypen

- Satz von Thales
- Trapez
- Prisma

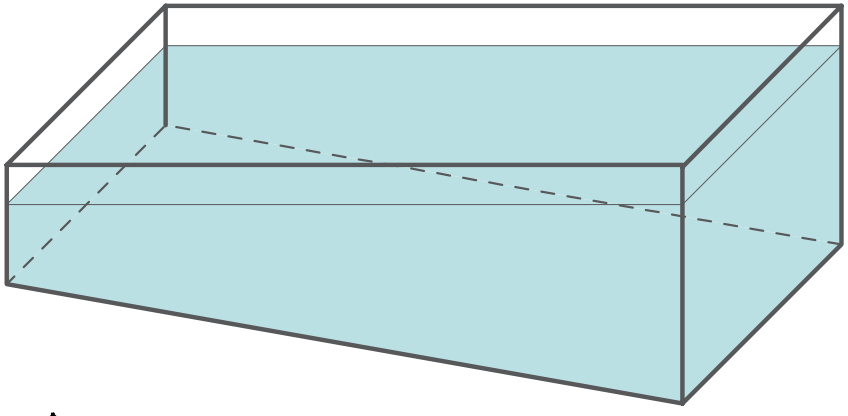


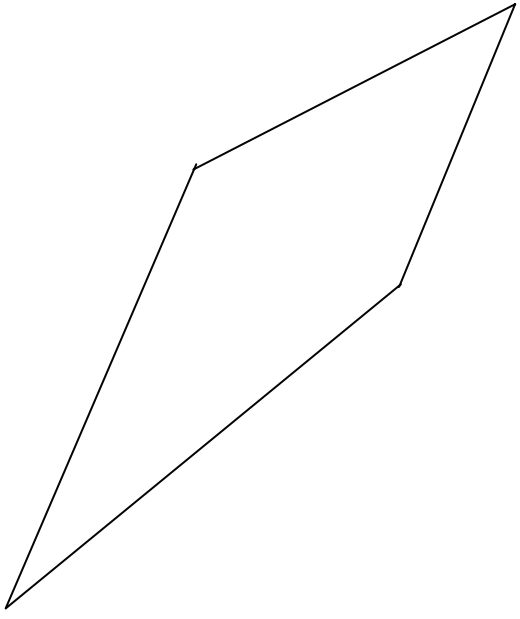


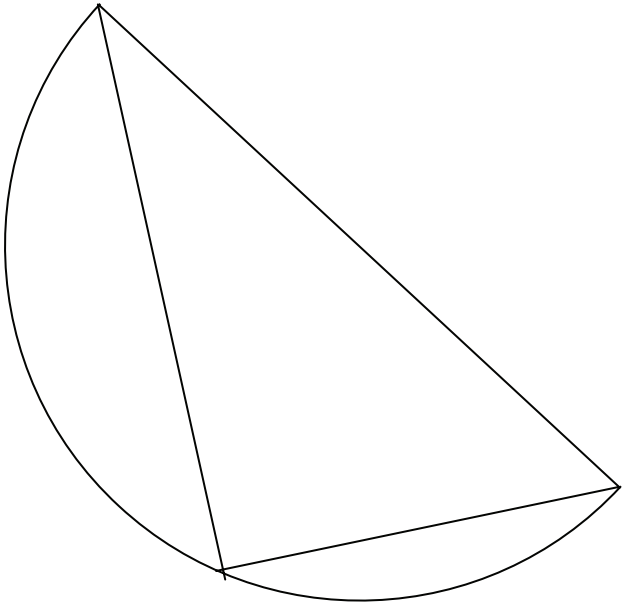


Dies ist für nachhaltiges Lernen sinnvoll, da dadurch der Merkaufwand reduziert wird!

Für Problemlöseprozesse ist allerdings eine Flexibilisierung der Modellvorstellungen notwendig!

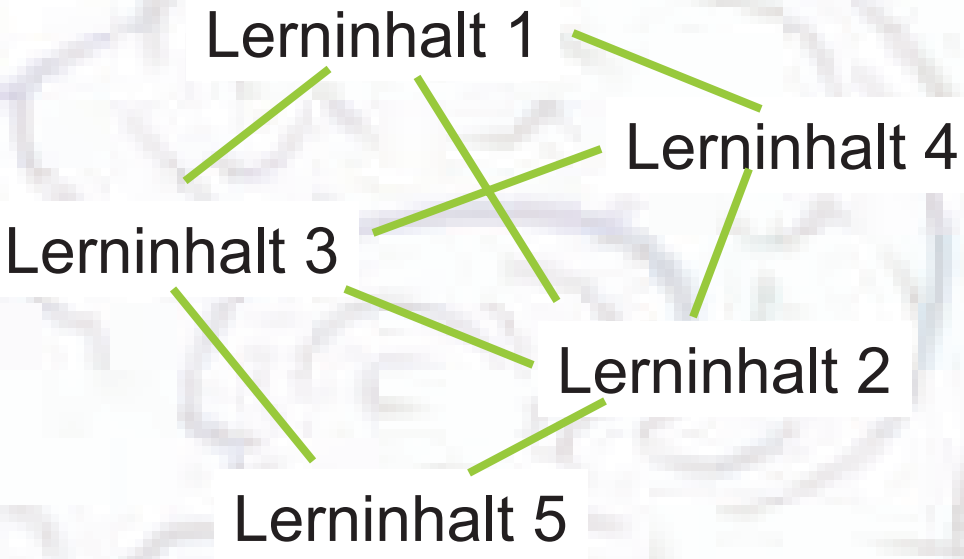






2. Säule: Vernetzung

„Vernetztes bleibt hängen“



- Analog zu Verbindung Bild–Aussage Verbindungen innerhalb der Lerninhalte
- Entsprechend der „Semantischen Gedächtnistheorie“ werden Inhalte netzwerkartig abgespeichert.
- Lehrmethoden und Repräsentationsformen, die eine solche Vernetzung fördern, gelten deshalb als besonders nachhaltig!

Welche Möglichkeiten bietet der Unterricht für ein vernetztes nachhaltiges Lernen?

Innermathematisches Vernetzen

- Analogisieren
- Modularisieren
- Überblick schaffen

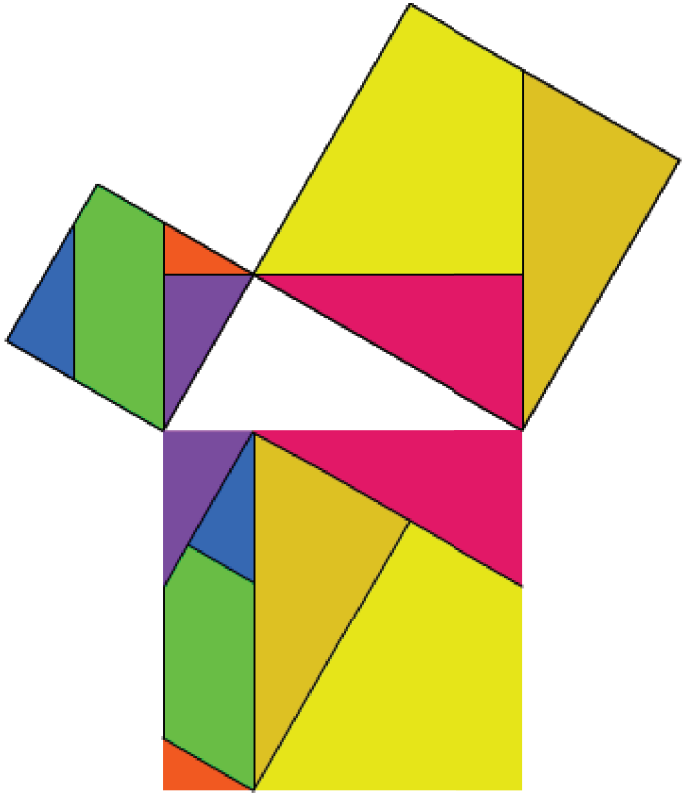
Vernetzen mit Umwelt

- Freihandmathematik
- Bedeutung der Mathematik in der Umwelt

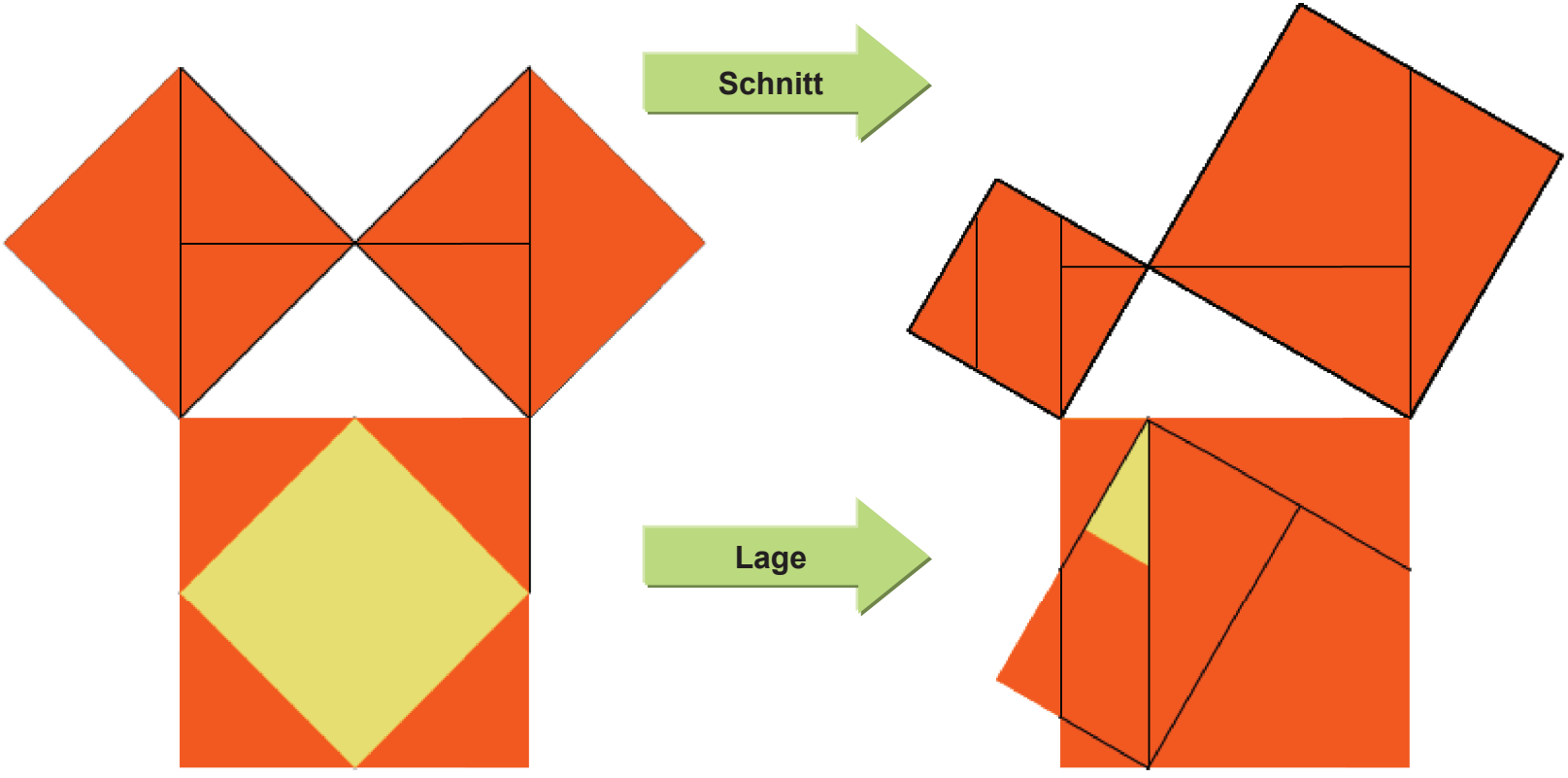
Analogisieren als Werkzeug zum Entdecken

- Man versucht bewusst, Ideen und Vorgehensweisen zu nutzen, die sich in früheren Fällen bewährt haben, für neue ähnliche Situationen.
- Insbesondere können damit von Sonderfällen ausgehend allgemeine Lösungen gefunden werden.

Beispiel: Zerlegungsbeweis des Pythagoras



Wie findet man solche Zerlegungen?

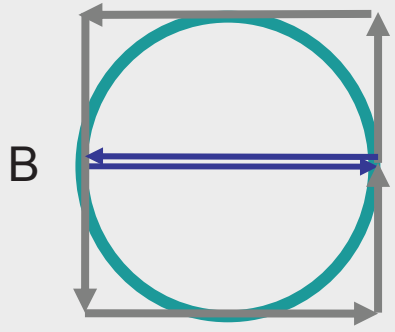


Reduktion durch Analogisieren

- Erarbeitet man in einem Lerngebiet Analogien zwischen einzelnen Teilen, so erhöht sich damit zunächst die Stoffmenge.
- Das Lernpensum wird aber letztlich erheblich reduziert, da man mit einer Idee mehrere Probleme auf einmal erfasst.

Beispiel: Formelbildung für Kreis und Kugel

Kreisumfang = 3,14 • d

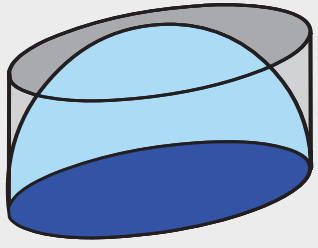


$2d < U_{Kreis} < 4d$

Grobabschätzung führt auf Formeln vom Typ:
Inhalt = x • Vergleichsinhalt

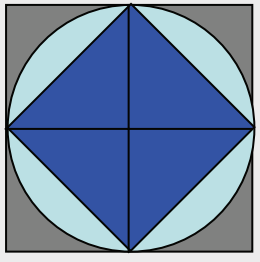
Analogisieren

Halbkugelfläche = 2 • A_{Kreis}



$1 \cdot A_{Kreis} < O_{Halbkugel} < 3 \cdot A_{Kreis}$

Kreisfläche = 3,14 • r^2

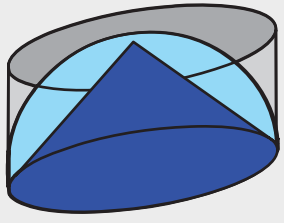


$2r^2 < A_{Kreis} < 4r^2$

Analogisieren

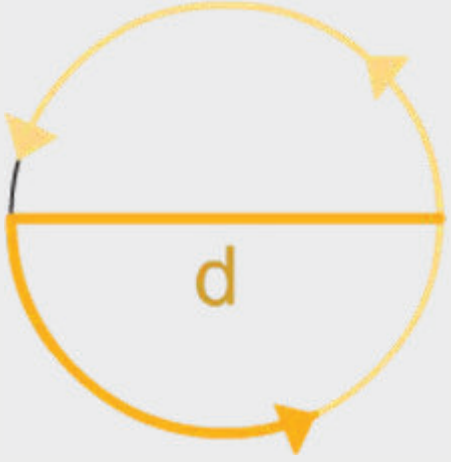
Analogisieren

Halbkugelvolumen = 2 • V_{Kegel}



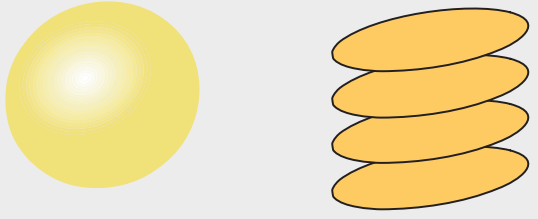
$1 \cdot V_{Kegel} < V_{Halbkugel} < 3 \cdot V_{Kegel}$

Kreisumfang = 3,14 • d



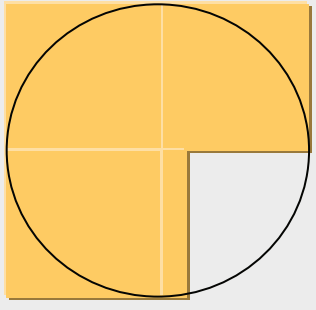
Analogisieren

Kugeloberfläche = 4 • A_{Kreis}



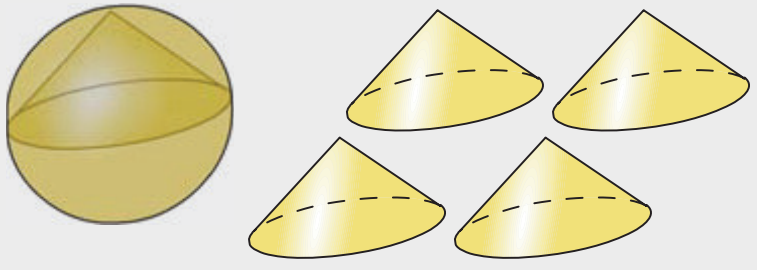
Analogisieren

Kreisfläche = 3,14 • r^2



Analogisieren

Kugelvolumen = 4 • V_{Kegel}



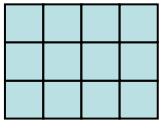
Beispiel: Flächeninhalt - Volumen

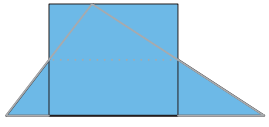
Begriffliche Grundidee: Auslegen

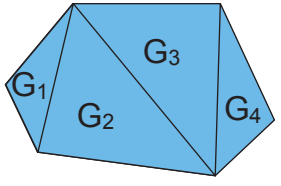
Abzählverfahren liefert Formel für Sonderfall

Rückführung auf Sonderfall durch Umbau

Triangulation





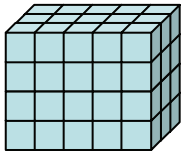


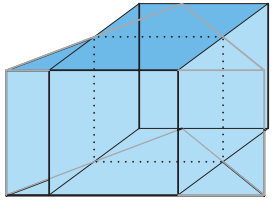
Analogisieren

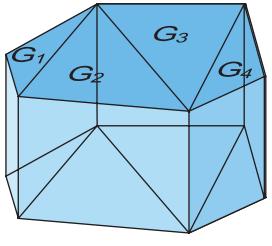
Analogisieren

Analogisieren

Analogisieren





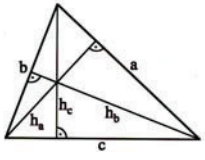


Reduktion durch Modularisieren

- Für den Schüler stellen sich viele Lernbereiche in der Mathematik als eine unüberblickbare Ansammlung unzusammenhängender Regeln, Formeln etc. dar.
- Bildet man Kategorien, lassen sich allgemeinere Regeln formulieren. Die Anpassung an den speziellen Fall erfolgt dann durch das Einsetzen bereits bekannter Module.
- Das Lernpensum wird erheblich reduziert!
- Die Kernmodule werden dabei ständig wiederholt und geometrische Vorstellungen wachgehalten!

Die erschlagende Fülle an Formeln

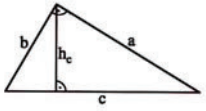
allgemein



$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$u = a + b + c$

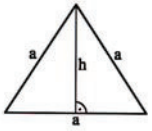
rechtwinklig



$A = a \cdot \frac{b}{2}$ $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$u = a + b + c$

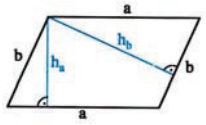
gleichseitig



$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$u = 3 \cdot a$

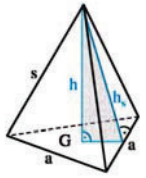
Parallelogramm



$A = a \cdot h_a$ $A = b \cdot h_b$

$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

dreiseitig, regelmäßig



$V = \frac{a^2}{12} \cdot \sqrt{3} \cdot h$

$M = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h_s$

$O = \frac{a}{4} \cdot (a \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot h_s)$

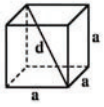
Würfel

$V = a \cdot a \cdot a$

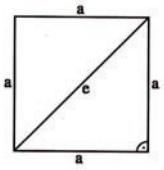
$V = a^3$

$O = 6 \cdot a^2$

$d = a \cdot \sqrt{3}$



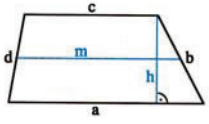
Quadrat



$A = a \cdot a$ $A = a^2$

$u = 4 \cdot a$ $e = a \cdot \sqrt{2}$

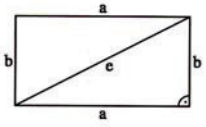
Trapez



$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ $A = m \cdot h$

$u = a + b + c + d$

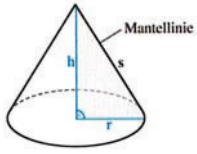
Rechteck



$A = a \cdot b$

$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

Kreiskegel

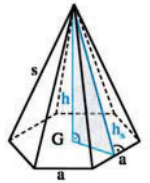


$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$M = r \cdot \pi \cdot s$

$O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$

sechsseitig, regelmäßig

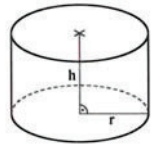


$V = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot h$

$M = 3 \cdot a \cdot h_s$

$O = \frac{3 \cdot a}{2} \cdot (a \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot h_s)$

Zylinder



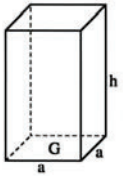
$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

Prismen

quadratisch

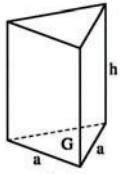


$V = a^2 \cdot h$

$M = 4 \cdot a \cdot h$

$O = 2 \cdot a \cdot (a + 2 \cdot h)$

dreiseitig, regelmäßig

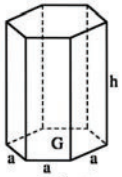


$V = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot h$

$M = 3 \cdot a \cdot h$

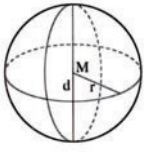
$O = \frac{a}{2} \cdot (a \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot h)$

sechsseitig, regelmäßig



$V = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot h$

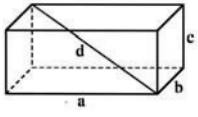
Kugel



$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = d^2 \cdot \pi$

Quader

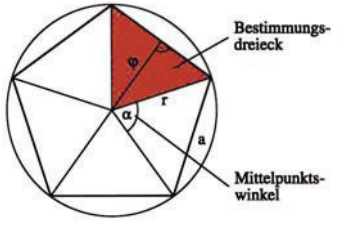


$V = a \cdot b \cdot c$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Regelmäßiges Vieleck (n-Eck)



n Anzahl der Ecken; $\alpha = \frac{360°}{n}$

$A = n \cdot a \cdot \frac{\varphi}{2}$ $A = n \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin\alpha$

$u = n \cdot a$

Modularisieren am Beispiel der Inhaltsformeln

Es gibt nur zwei Volumenformeln!

Gerade Säulen	Spitze Körper
V = Gh	V = 1/3 Gh

$V_{Zylinder} = \pi r^2 h$ $V_{Rechteckspyramide} = 1/3\ abh$

$V_{Zylinder} = G_{Kreis}\ h$

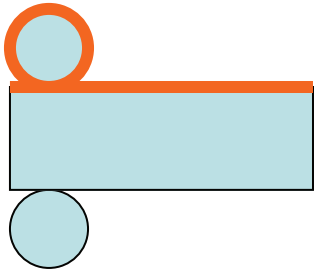
$3{,}14\ r^2$

Modularisieren am Beispiel der Inhaltsformeln

Wir brauchen keine Formeln für die Oberfläche!

Wir brauchen präzise Vorstellungen von den Netzen!

Beispiel: Zylinder



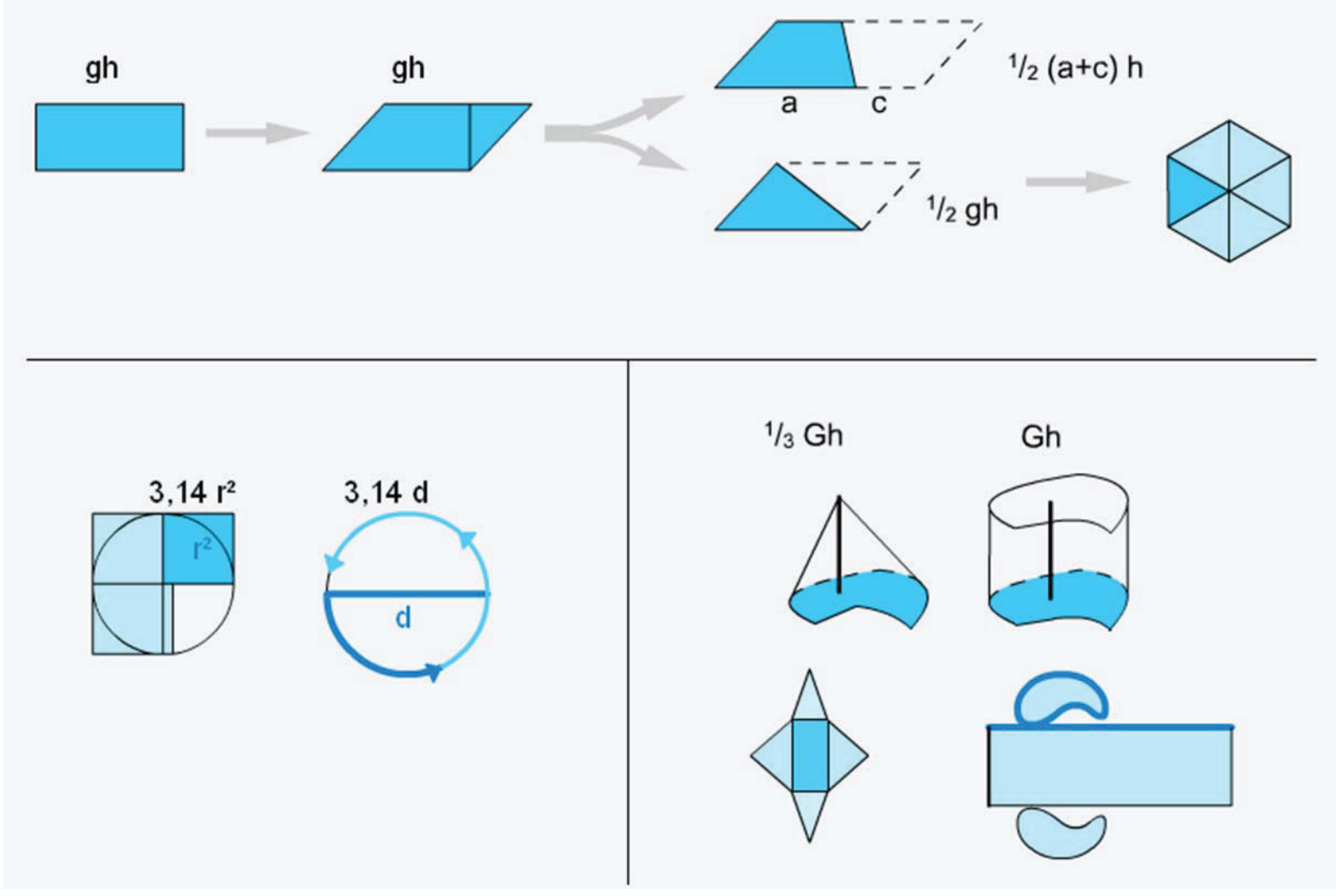
$A = 2\pi r^2+2\pi rh$

$A = 2\pi r(r+h)$

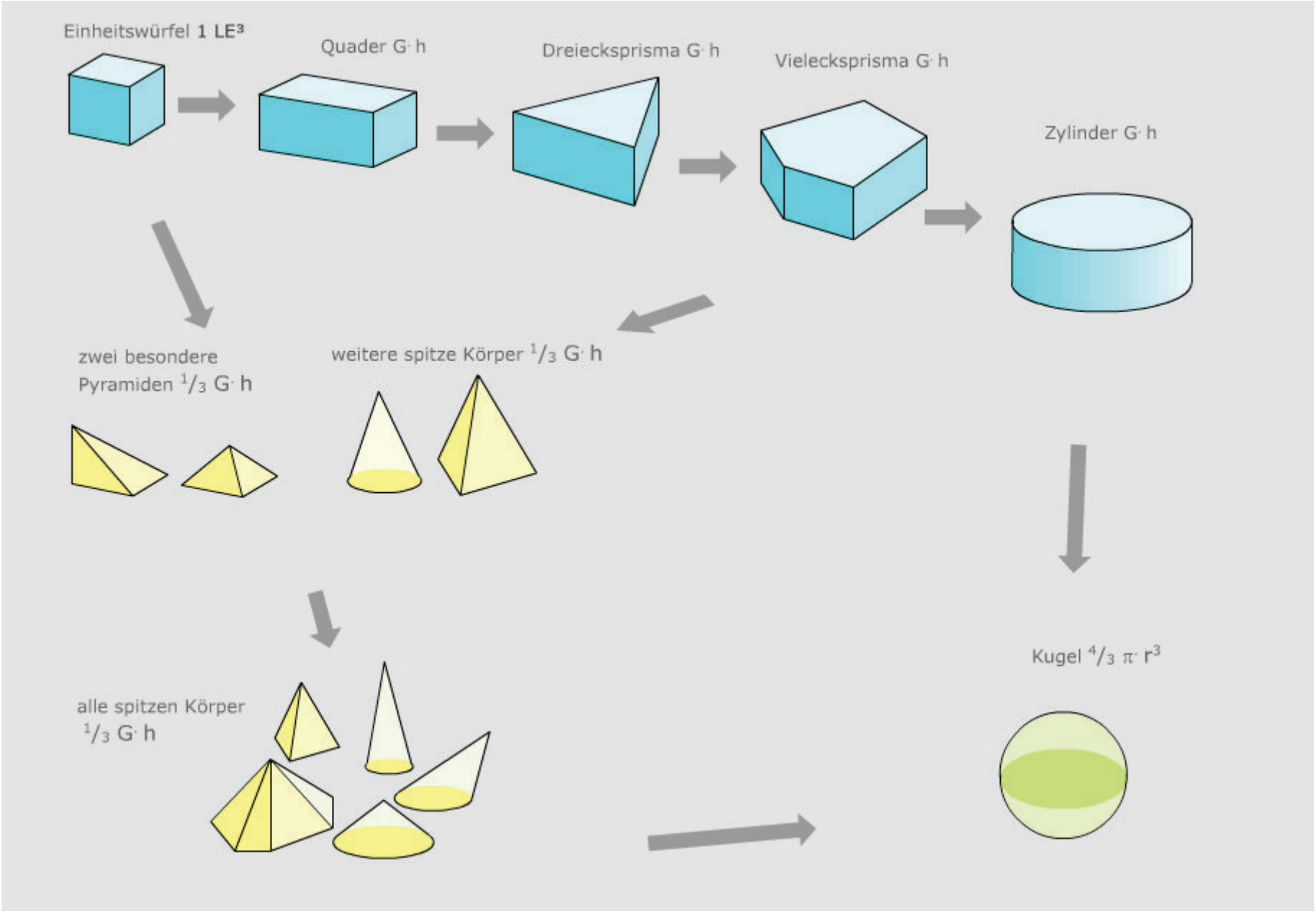
Bekannt sein müssen die Module

- Zylindernetz
- Kreisfläche
- Rechtecksfläche
- Kreisumfang

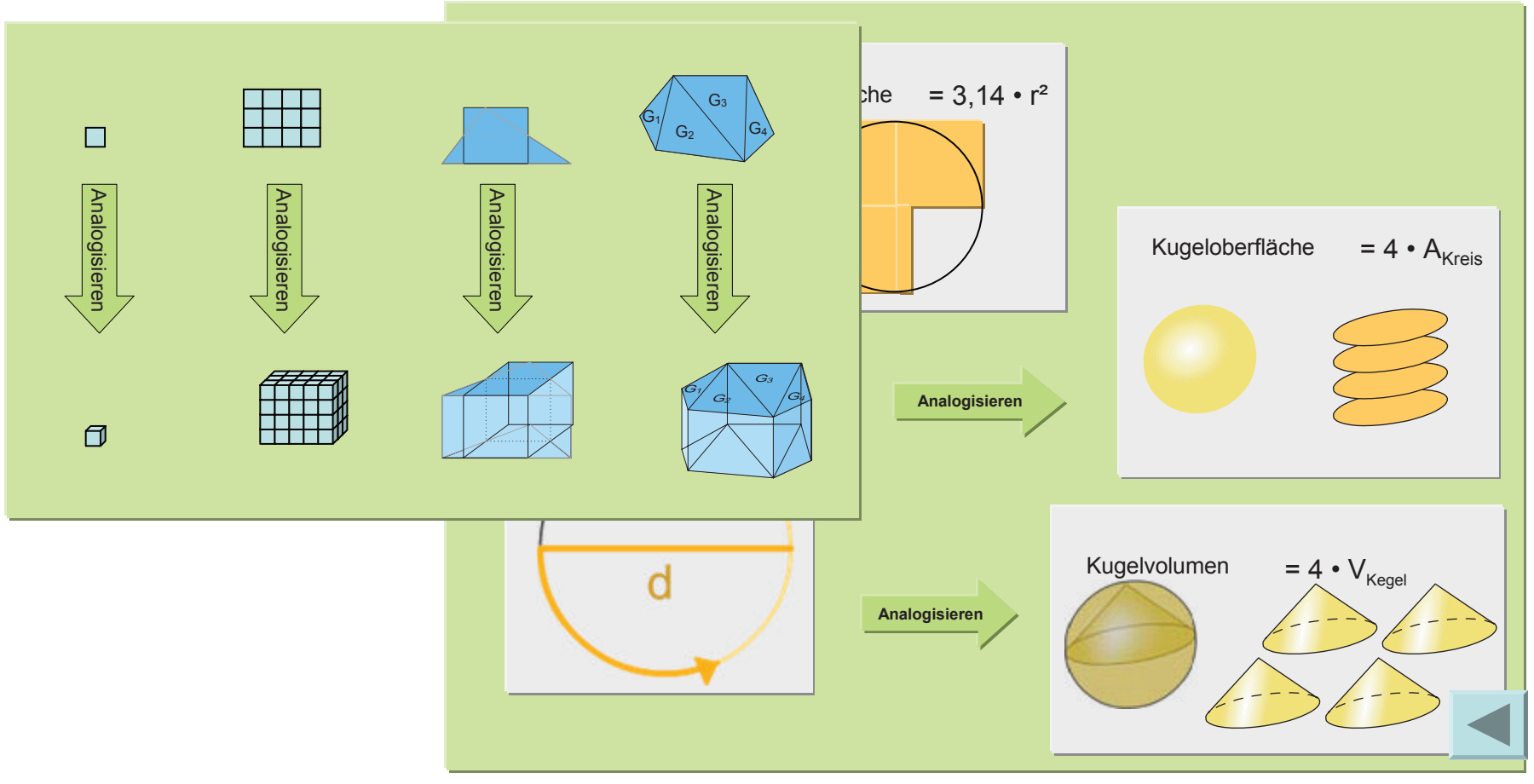
Was soll man denn eigentlich wissen?



Überblick über die Volumenbestimmung



Auch Analogien können in Form von Überblicksdarstellungen zusammengefasst werden



Vernetzen mit Umwelt: „Freihandmathematik“

- Einfache und alltagstaugliche Einsatzmöglichkeiten für Mathematik aufzeigen
  - Mathematiktreiben aus dem Klassenzimmer in den Alltag exportieren.
  - Dies soll mathematisches Wissen verfestigen und Nachhaltigkeit über die Schule hinaus erzeugen.

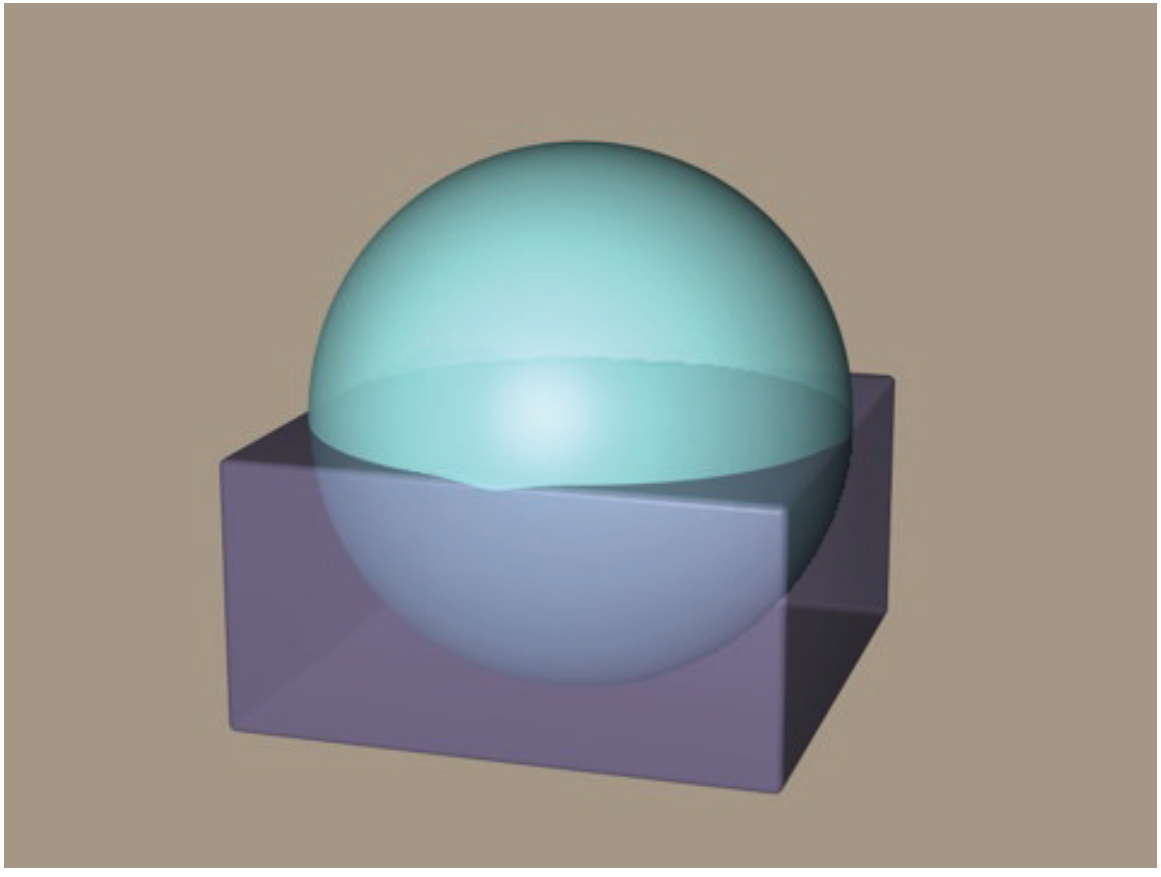
Beispiel:
Welche Masse hat eigentlich diese Kugel?

Beispiel: Masseschätzung einer Steinkugel

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \rho = 2{,}4\,\frac{g}{cm^3} \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

Vereinfachen einer Formel

Kugelvolumen $\approx \frac{41}{32}\pi r^3$ Würfelvolumen $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 4r^3$



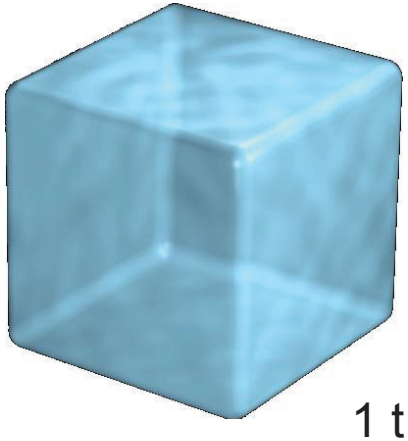
Stützpunkt-Relativ-Prinzip

Wasser

1cm³ 1 g

1dm³ 1 kg

1m³ 1 t



0,5 x

Holz

2 x

Stein

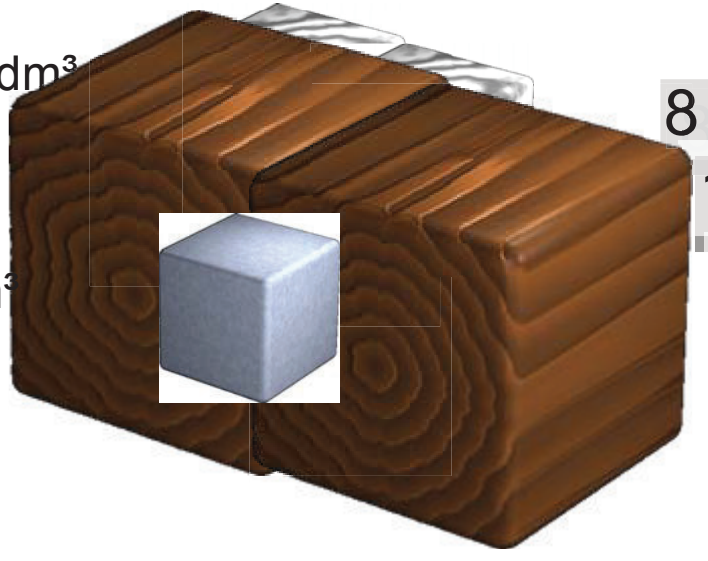
8 x

Eisen

4 dm³

2 m³

1dm³



8 kg

1 t

8 kg

Welche Masse hat eigentlich diese Kugel?

Durchmesser ≈ 1m

Würfel V ≈ 1 m³

Kugel V ≈ 0,5 m³

Wasserkugel
m ≈ 0,5 t

Steinkugel
m ≈ 1 t

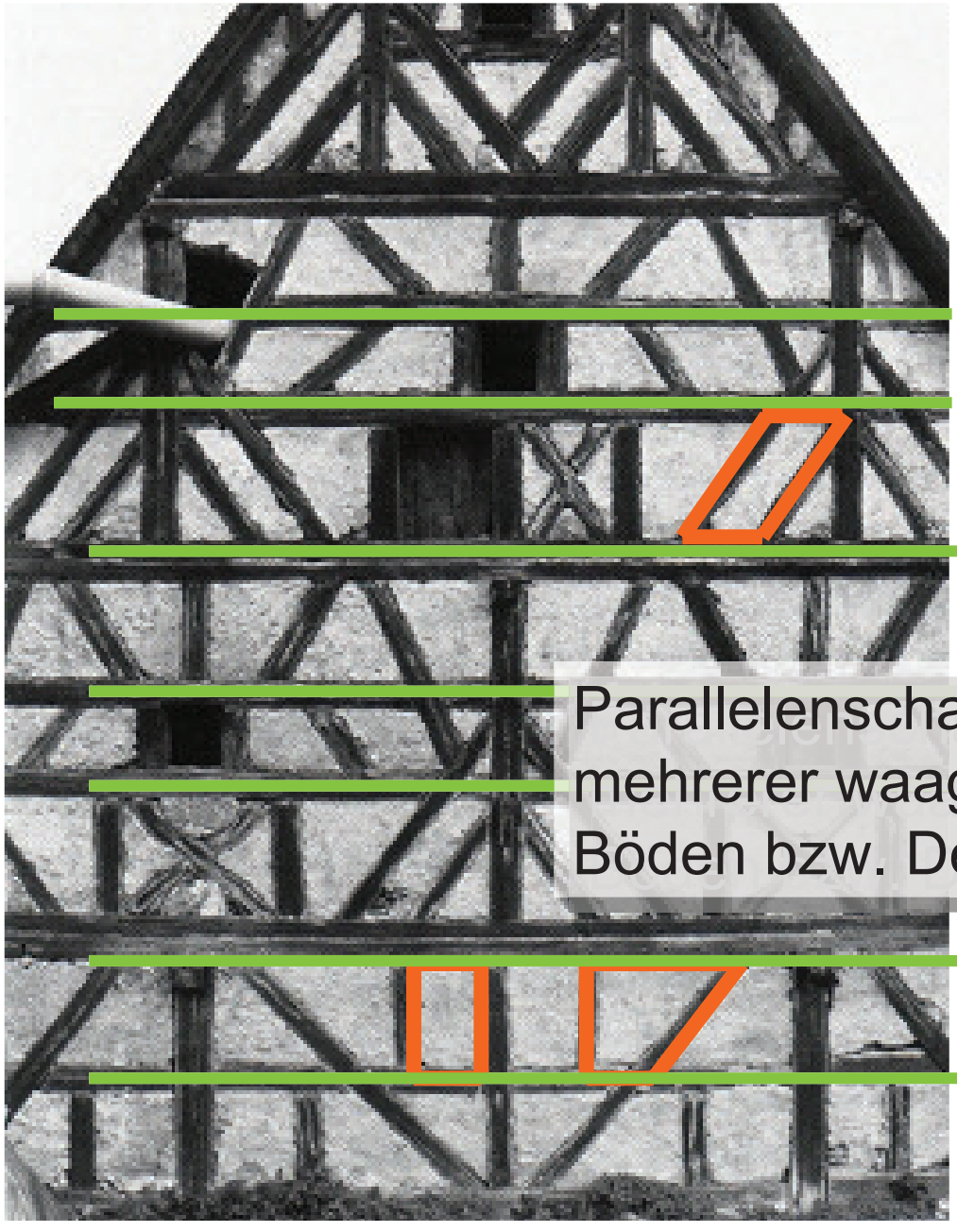
Mathematik in der Umwelt finden und hinterfragen

- Wo kommt ein geometrischer Begriff (Objekt, Eigenschaft, Relation,…) vor?
  - Z.B.: „Wo findest du hier im Klassenzimmer (Schulhaus, Straße…) Trapeze (Parallelität, Drehungen…)?
  - Ziel: Blick schärfen für mathematische Begriffe in der Umwelt und fachsprachliche Bezeichnungen einüben

- Warum kommt ein „Begriff“ gerade hier vor?
  - Warum findet man so viele Trapeze an einer Fachwerkfassade?
  - Warum ist etwas kreisförmig?

  - *Ziele*:
    - Bewusstsein für die Bedeutung mathematischer Begriffe zur Erschließung der Umwelt wird geschaffen
    - Mathematische Begriffe werden wachgehalten
    - Die Allgemeinbildung wird gefördert

Fachwerk



Parallelenschar aufgrund mehrerer waagerechter Böden bzw. Decken

Aspektreichtum des Kreisbegriffs

- Kreis ist der Ort aller Punkte gleichen Abstands von einem Zentrum
- Kreis ist Figur minimalen Umfangs
- Kreis ist Figur maximaler Symmetrie
- Kreis ist Rotationsfigur

Schimmelkultur, Hexenring, Baumscheibe…

Schimmelkulturen, Hexenringe und Baumscheiben wachsen von einem Zentrum aus mit etwa gleicher Geschwindigkeit nach außen!

Mathematischer Bezug:
Kreis ist der Ort aller Punkte gleichen Abstands von einem Zentrum

Randzonen sind für Städte (Aspekt: Verteidigung) und Pinguingruppen (Aspekt: Wärme) problematisch

Mathematischer Bezug:
Kreis ist Figur minimalen Umfangs

„Runder Tisch“ beim Energiegipfel in Berlin

Am Runden Tisch ist jeder gleichgestellt

Mathematischer Bezug:
Kreis ist Figur maximaler Symmetrie

Teller als Rotationskörper erzeugt

Beim Töpfern bzw. Drechseln etc. wird die Hand bzw. der Beitel mit festem Abstand vom Drehzentrum gehalten, während das Objekt rotiert. Der Werkzeugeinfluss ist also für jede Drehposition der Scheibe gleich.

Mathematischer Bezug:
Kreis als Rotationsfigur

3. Säule: Training

Was sollte man beim Training berücksichtigen?

Auch Begriffsbildung und Vernetzung trainieren!

Nicht zuviel Aspekte auf einmal trainieren – Training fokussieren

Auf angemessene Wiederholungsintervalle achten

Abschätzen

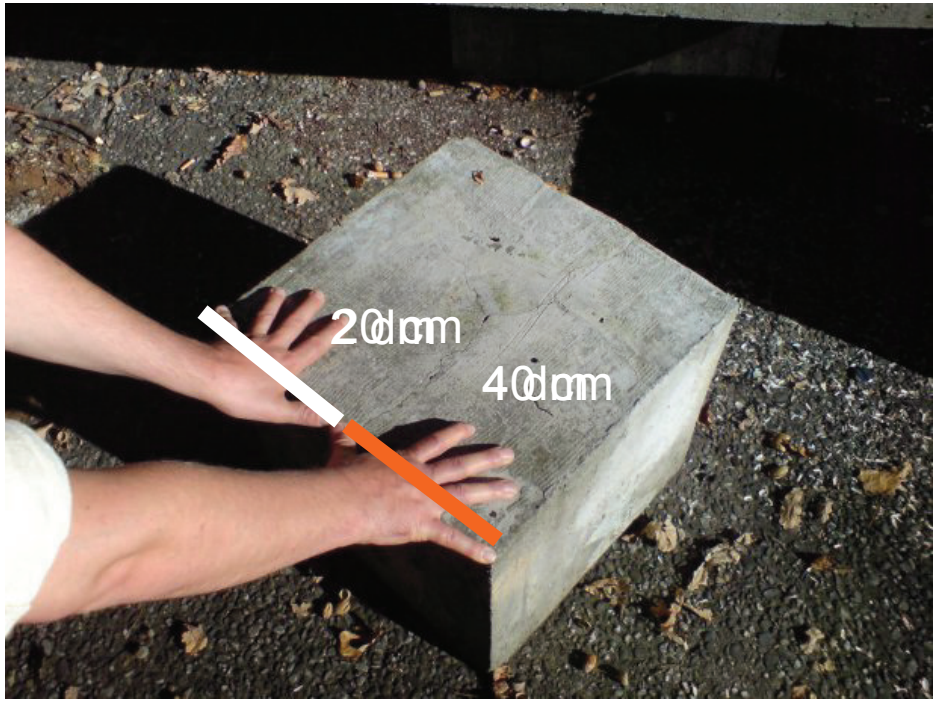
Beim Abschätzen

- kann das Grundverständnis gefestigt werden:
  - Von komplizierten Rechnungen entlastet konzentriert sich der Schüler auf die Grundstruktur
- können Zahl- und Größenvorstellungen trainiert, insbesondere Stützpunkte aufgebaut werden

Wie viele Personen benötigt man , um diese Tischplatte zu heben?
Kann dieser Sitzblock von einer Person getragen werden?

Kann man den Sitzblock wegtragen?

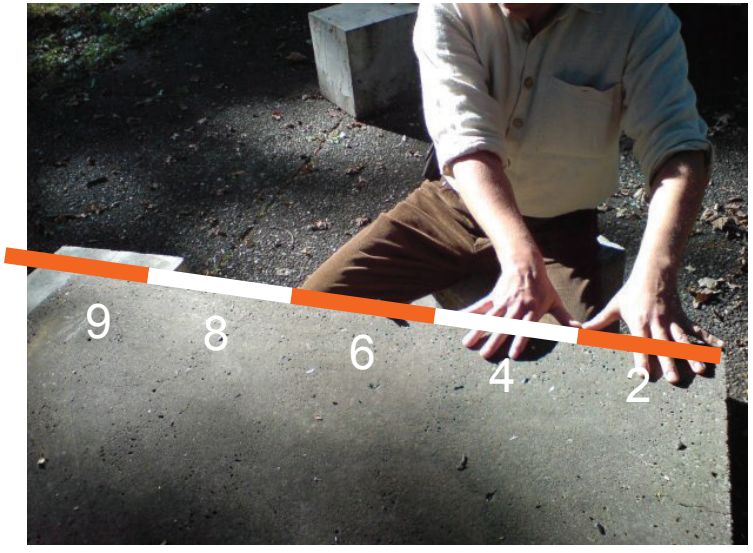
Nö!

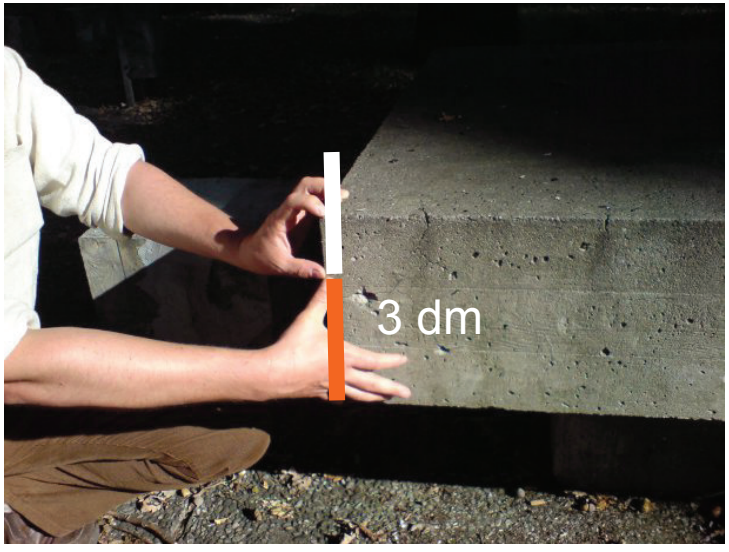


Volumen ≈ 64 dm³

m ≈ 130 kg

Wie viele Personen benötigt man für die Platte?





$G \approx 80\ dm^2$

$h \approx 3\ dm$

$V \approx 240\ dm^3$

$m \approx 500\ kg$

Wenn jeder 50 kg packt, braucht man 10 Mann

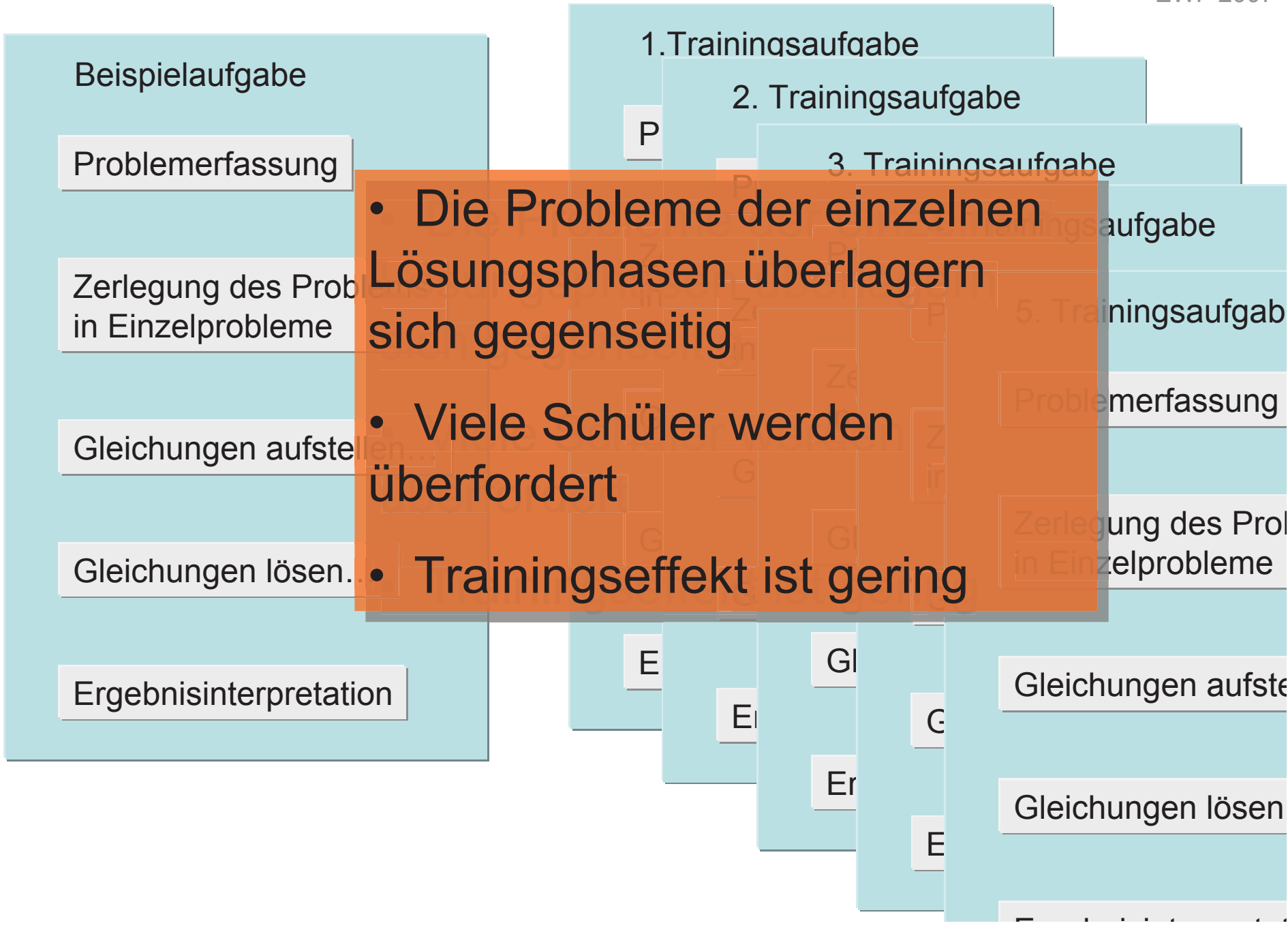
Fokussierendes Training

Wie wird normalerweise trainiert?

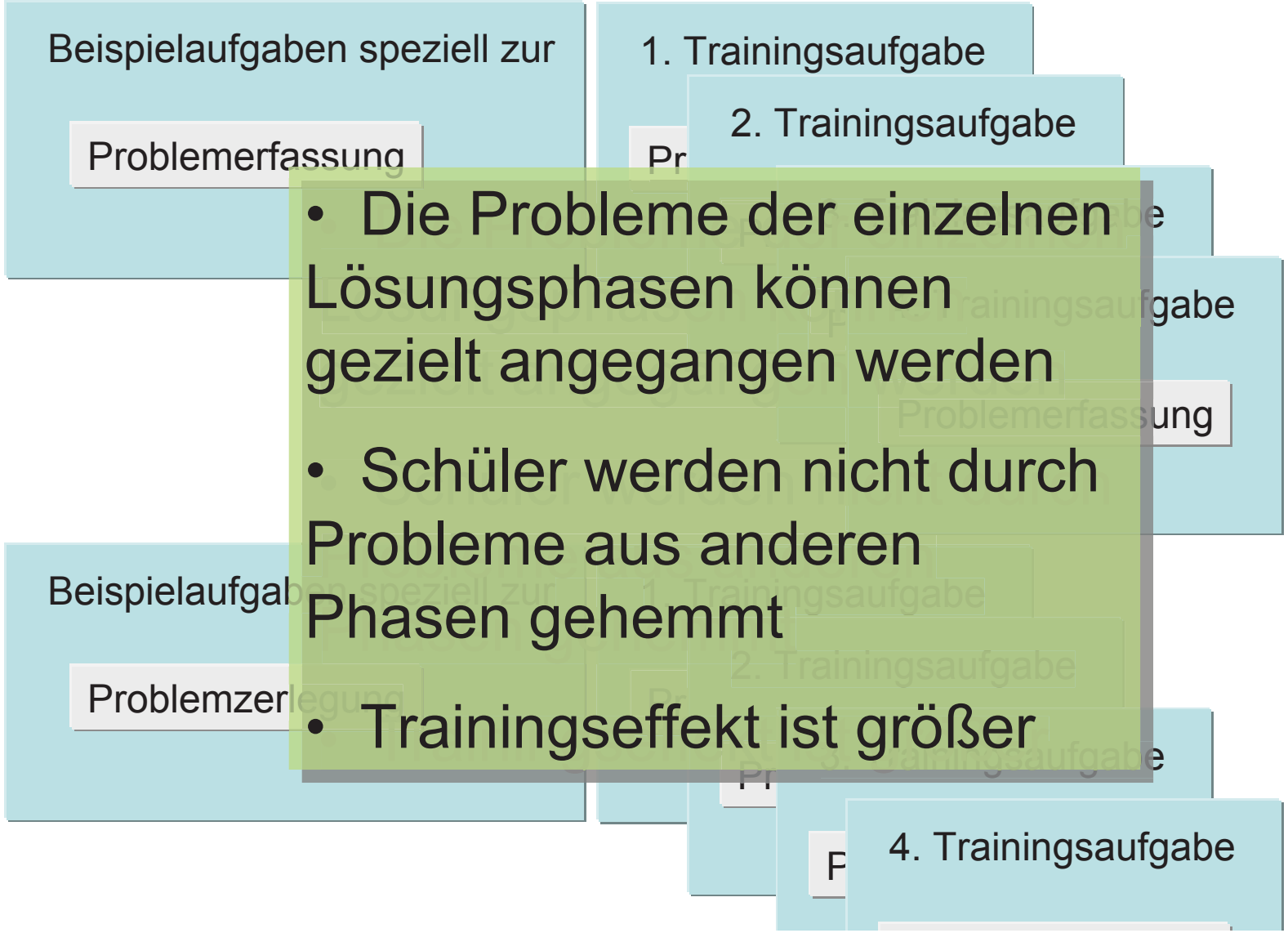
- Ist das Ziel z.B. das Lösen von Sachaufgaben, so werden einige zunächst exemplarisch gemeinsam gelöst und
- schließlich trainieren die Schüler, indem sie weitere komplette Aufgaben desselben Typs lösen

3. Säule: Training: Fokussierendes Training

EWF 2007



Fokussierung des Trainings auf einzelne Lösungsphasen



- Die Probleme der einzelnen Lösungsphasen können gezielt angegangen werden
- Schüler werden nicht durch Probleme aus anderen Phasen gehemmt
- Trainingseffekt ist größer

Beispiel: Volumenbestimmung zusammengesetzter Körper

4. Ein Silberschmid schmilzt 280 g Silber (Dichte: $\rho = 10{,}5\ g/cm^3$), um daraus Roh-

lin

Wi

50

4. Ein massives Werkstück wird aus Messing (Dichte: $\rho = 8{,}5\ kg/dm^3$) hergestellt. Es hat

320

6

die

gro

Dac

um

Ber

4. Die Firma Supersound entwickelt eine neue Bassreflex-Standbox (siehe Skizze):

100

110

125

a) Dami

cherb

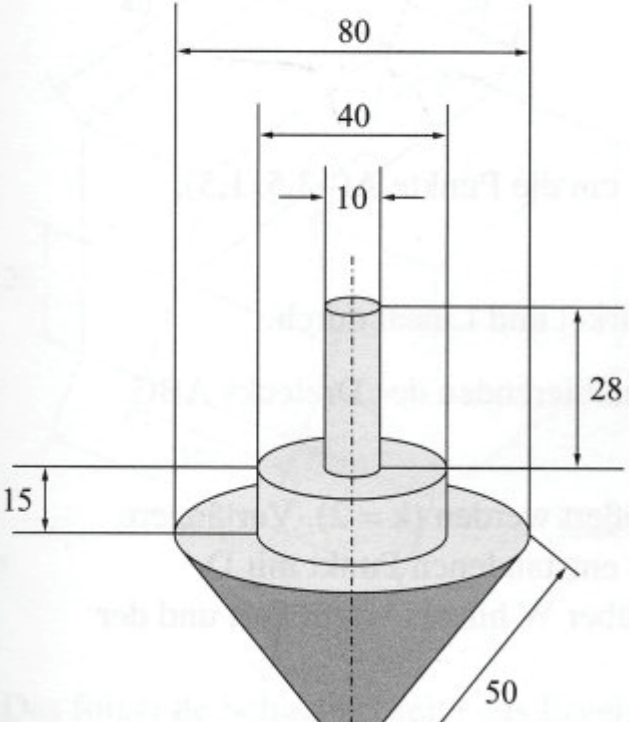
Wie

b) Die E

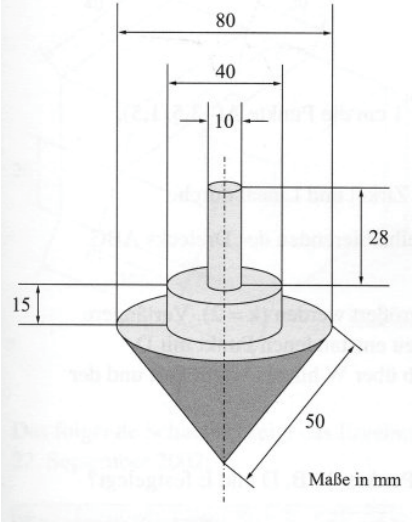
bleib

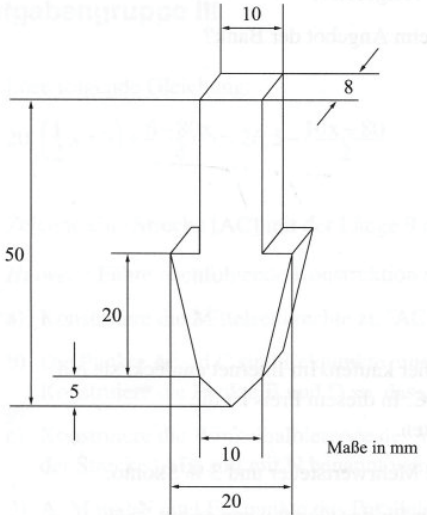
2. Bei einem Spielwarenhersteller werden Kreisel (siehe Skizze) aus Edelstal

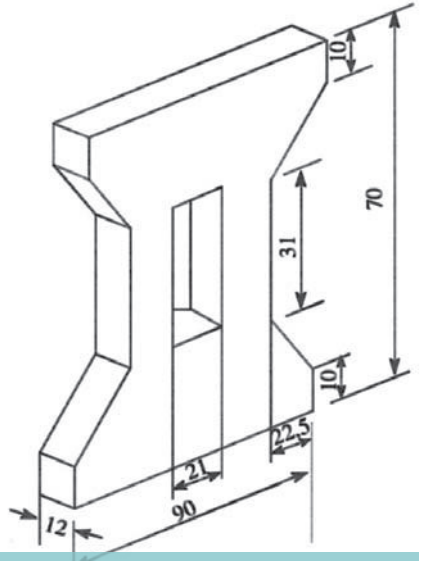
gestellt.

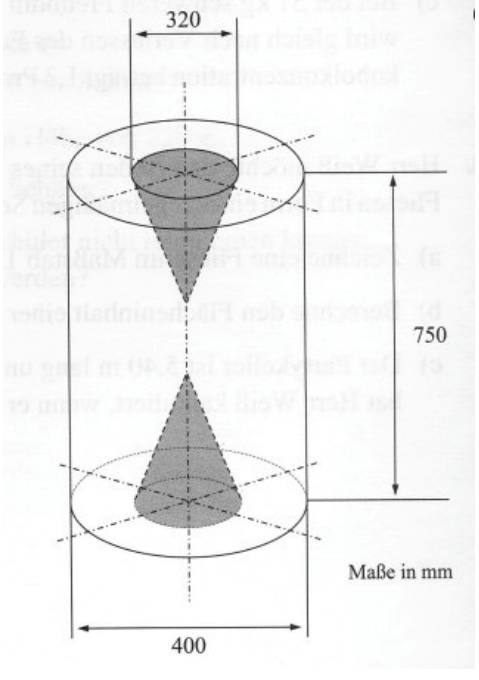


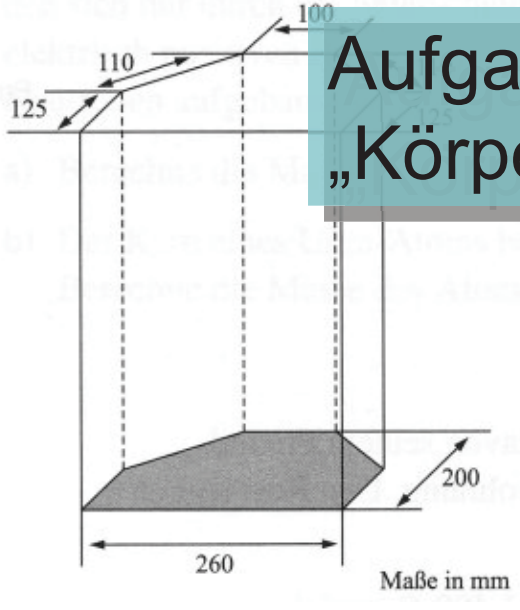
Fokussierung auf den Aspekt Analyse der Körperform



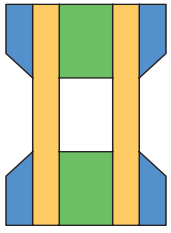


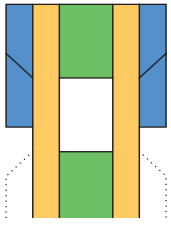






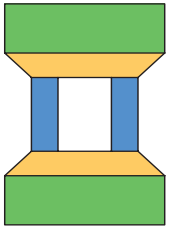
Aufgabenreihe „Körper analysieren“

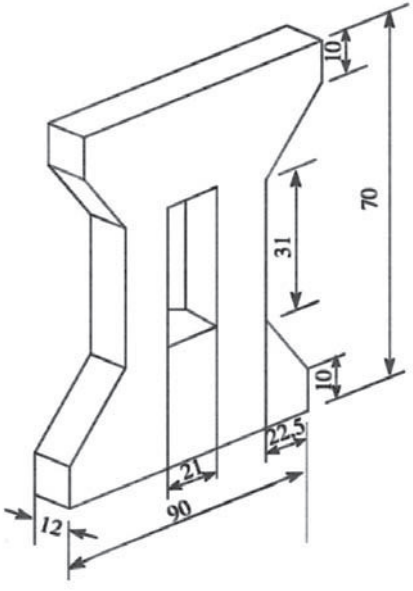


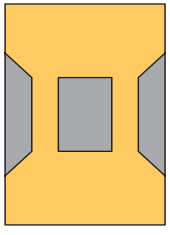


Umbau

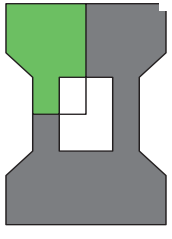
Zerlegungsvarianten

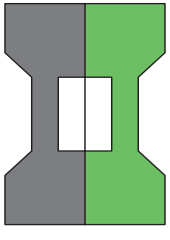


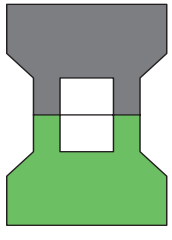




Subtraktive Beschreibung



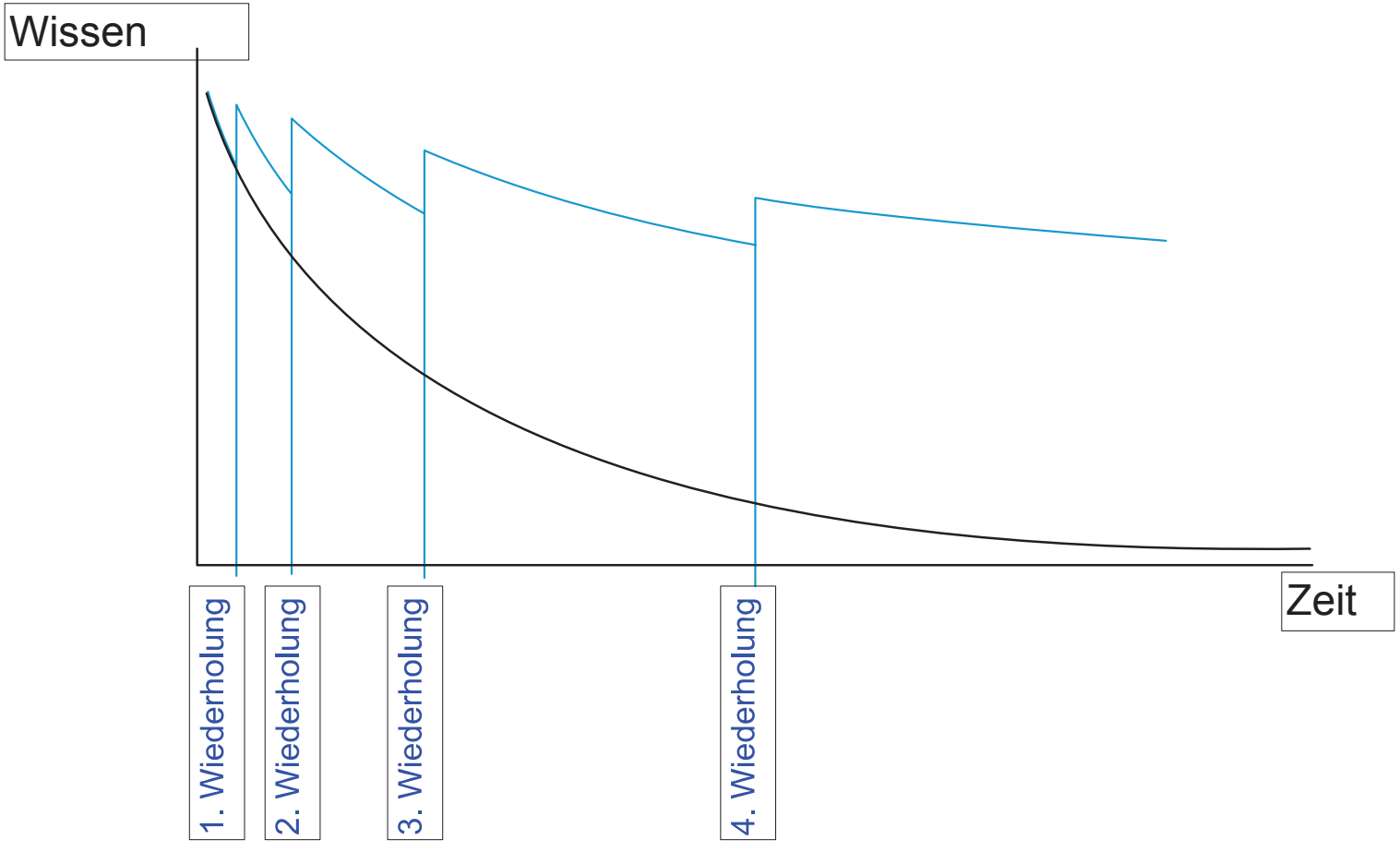




Symmetrien nutzen

Wiederholung

- Dem Vergessen entgegenwirken (Vergessenskurve)
  Wiederholungsintervalle



Methoden des Wiederholens

- Tägliche Kurzübungen mit der Klasse
  - auch Begriffsbildung und Vernetzung
  - halten Fähigkeiten und Vorstellungen aufrecht, beheben aber keine Defizite
- Individuelles Wiederholen
  - Hier sollen auch individuelle Defizite behoben werden
  - Bibliothek an Kurzzusammenfassungen
    - Lösungsweg für quadratische Gleichung
    - Übersicht über Ableitung der Volumenformeln
  - Lernkarteien analog zum Vokabellernen

Zusammenfassung

- Stabile Begriffsbildung
  - Aspektreichtum
  - Zu den Aspekten passenden Schüleraktivitäten
  - Mentale Bilder
- Vernetzung
  - Innermathematische Vernetzung
    - Analogisieren
    - Modularisieren
    - Überblick schaffen
  - Vernetzung mit Umwelt
    - Freihandmathematik
    - Mathematik in der Umwelt hinterfragen
- Training
  - Auch von Begriffsbildung und Vernetzung
  - Fokussierendes Training
  - Wiederholung

Vielen Dank
für Ihre Aufmerksamkeit!
Nachhaltigkeit des Lernerfolgs
Stabile Begriffsbildung
Training
Vernetzung

Zusammenfassung

- Stabile Begriffsbildung
  - Aspektreichtum
  - Mentale Bilder
    - Zwei Welten; Rechnen mit Vorstellungen statt mit Regeln
    - Zu den Aspekten passende Schüleraktivitäten
      Quaderaufbau: Kanten-, Flächen-, Eckenzahl -> Übertragung auf Prisma
    - Strukturübersichten, Rückschauübersichten
- Vernetzung
  - Innermathematische Vernetzung
    - (Querverbindungen herstellen) Inhalte Verknüpfen
      - Bsp.: Grundkonstruktionen – Viereckslehre
    - (Längsverbindungen) „Jahrelange“ rote Fäden spinnen
      - Bsp.: Dreiecksparkettierung: bereits in der GS Bedeutung erkennen, vorbereitende Aufgaben
    - Analogisieren
      - Ebene zu Raum: Inhaltslehre; Diagonalenlänge;
      - Sonderfall zu Allgemeinfall: Pythagoras
      - zwischen ähnlichen Systemen;

        » Ausgangssystem zu variiertem System
    - Modularisieren
    - Überblick schaffen (Rückschauübersichten)
  - Vernetzung mit Umwelt
    - Freihandmathematik
    - Mathematik in der Umwelt hinterfragen
- Training
  - Auch von Begriffsbildung und Vernetzung
  - Fokussierendes Training
  - Wiederholung