

Kopfrechenweltmeisterschaft
für Schülerinnen und Schüler
Nürnberg 2008

SUDOKU - WORKSHOP

Die Methode des Meistermachers



Nürnberger Kolloquium zur Didaktik der Mathematik 2008

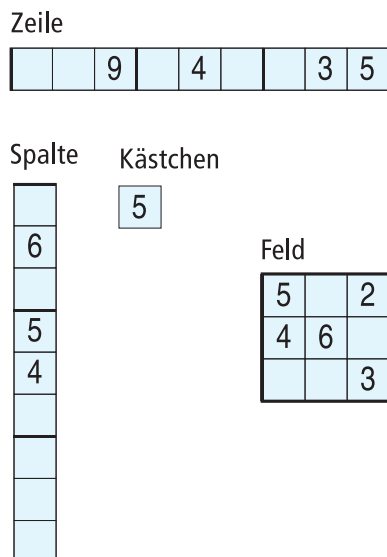
Die Sudoku-Schule

Raten kann helfen. Führt aber meist in die Irre. Intuition ist nicht verkehrt. Kann aber Täuschen. Wie Sie ein Sudoku sicher lösen, lernen Sie in dieser Punkt-für-Punkt-Anleitung. Garantiert.

Haben Sie auch schon verzweifelt auf ein Rätsel geschaut, ohne weiterzukommen? Damit ist jetzt Schluss. Hier wird Schritt für Schritt erklärt, wie man ein Sudoku löst. In 24 Schritten füllen wir zusammen ein komplettes Rätsel aus.

Dabei werden Sie lernen, wie einfach es ist mithilfe ein paar kleiner Tricks schnell zum Erfolg zu kommen. Besonders hilfreich sind bestimmte "kleine Ziffern", die Sie beim Lösen eines Sudokus benutzen.

Zur einfachen Orientierung sind in der folgenden Anleitung bestimmten Dingen immer gleiche Namen gegeben:



Immer dann wenn man von zwei Kästchen eines Feldes weiß, dass in eines der beiden eine bestimmte Ziffer gehört, "merkt" man sich das, indem man klein und in die Ecke schreibt – Sie werden es erleben!

Die einzige Hilfe zu Beginn sind natürlich die Ziffern, die im Rätsel schon vorgegeben sind. Dabei entscheidet über die Schwierigkeit eines Sudoku nicht unbedingt, wie viele Vorgaben vorhanden sind, sondern an welchen Stellen diese stehen. So kann es sein, dass ein Rätsel mit nur 20 Vorgaben in zehn Minuten erledigt ist, während Sie für eines mit 30 eingetragenen Ziffern Stunden brauchen.

Gehen Sie davon aus, die einfachen, mittleren und schwierigen Sudokus der heutigen Tagespresse immer mit Logik lösen zu können, während Sie bei extrem schweren Versionen auch schon mal raten müssen, um dann festzustellen, den falschen Weg gegangen zu sein. In solchen Fällen müssen Sie sich den Rückweg merken und von dort erneut beginnen.

Sie wissen, dass in jeder Spalte (senkrecht) jede Ziffer von 1 bis 9 vorkommen muss und zwar nur einmal – gleiches gilt für die Zeilen (waagrecht) und die sogenannten Felder. Später, wenn sich ein Rätsel füllt wird es daher immer wichtiger durchzuzählen, was in einer Spalte, Zeile oder in einem Feld noch fehlt.

Jetzt wollen wir aber endlich anfangen.

Ein kleiner Tip noch: Nehmen Sie schon jetzt einen Stift zur Hand und versuchen Sie durch Eintragungen die Erläuterungen im Text nachzuvollziehen.

Viel Vergnügen wünscht

Stefan Heine

Die Aufgabe

Ein Sudoku besteht aus 81 Kästchen, neun senkrechten Spalten, neun waagerechten Zeilen und aus genau neun Feldern mit 3 x 3 Kästchen.

In jedes dieser Elemente müssen alle Ziffern von 1 bis 9 exakt einmal eingetragen werden.

Dieses Sudoku werden wir auf den folgenden Seiten zusammen lösen und Sie werden eine Menge lernen und viele Tricks und Kniffe erkennen.

5		2			3			
4	6			7		9		
		3	4					
9	5			6				
	4						9	
				9			1	7
					7	2		
		9		4			3	5
			3			7		6

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5	1	2			3			
4	6			7		9	3	
		3	4	2				
9	5			6				
	4			5			9	
				9			1	7
					7	2		
	9		4				3	5
		3				7		6

Bereiche

Beim Lösen eines Sudokus ist es besonders wichtig auf die Ziffern in den sogenannten Feldern zu achten. Um das Auffinden dieser Felder zu erleichtern, haben wir sie alle von eins bis neun durchnummeriert.

Hier links sehen Sie die Anordnung, die uns durch den ganzen Workshop begleiten wird.

5		2			3			
4	6			7		9		
		3	4					
9	5			6				
	4						9	
				9			1	7
					7	2		₁
		9		4		₁	3	5
			3			7		6

Am Anfang

In der Spalte und in der Zeile, in der eine Ziffer steht, kann diese nicht noch einmal vorkommen. Dies ist Ihr erster Anhaltspunkt. Damit können Sie das gesamte Rätsel absuchen. In Feld **6** finden Sie eine 1. Die "gesperrten" Bereiche, in denen keine 1 stehen darf, sind grau unterlegt. Jetzt sehen Sie, dass in Feld **9** nur zwei mögliche Kästchen für eine 1 frei sind. Da noch nicht bekannt ist, in welches der beiden Kästchen die 1 muss, tragen Sie die 1 ganz **klein** in **beide** Kästchen ein.

Später sehen wir, welch großen Nutzen dieses Vorgehen haben kann.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Die zweite Ziffer

In gleicher Weise gehen Sie jetzt mit der 2 vor. Zwei 2en sind vorhanden, in den Feldern **1** und **9** – dort darf also keine weitere 2 eingetragen werden. In den sieben anderen Feldern fehlt die 2. Die grau unterlegten Bereiche sind tabu, denn dort ist senkrecht oder waagrecht schon eine 2 vorhanden oder das Kästchen ist durch eine andere Ziffer belegt. Leider bleiben in allen sieben Feldern mindestens drei Kästchen möglich, so dass Sie keine kleinen Hilfs-Ziffern eintragen können. Doch seien Sie nicht enttäuscht, bei der 3 wird alles besser.

5		2			3			
4	6			7		9		
		3	4					
9	5			6				
	4						9	
				9			1	7
					7	2		₁
		9		4		₁	3	5
			3			7		6

Erste Treffer

Hier sind alle Bereiche, in denen keine 3 stehen darf, grau markiert. Schauen Sie sich bitte die Felder **3** und **5** an. Dort ist jeweils ein Kästchen frei - genau hier können Sie Ihre ersten beiden Treffer eintragen!

Im Feld 7 bleiben zwei Möglichkeiten für die 3. So sehen Sie dort im nächsten Bild zwei kleine Hilfs-Ziffern, mit denen Sie sich merken, dass in diesem Feld die 3 nur in diesen beiden Kästchen stehen kann.

Diese kleinen Ziffern sind das zentrale Element der hier beschriebenen Methode.

5		2			3			
4	6			7		9		
		3	4					
9	5			6				
	4						9	
				9			1	7
					7	2		₁
		9		4		₁	3	5
			3			7		6

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5		2			3			
4	6			7		9		3
		3	4					
9	5			6		₃		
	4			3			9	
₃	₃			9		₃	1	7
₃	₃				7	2		₁
		9		4		₁	3	5
			3			7		6

Kleine Schritte

Jetzt fehlt die 3 nur in den Feldern **4**, **6** und **7**, in denen jeweils nur zwei Positionen übrig bleiben. Wieder können Sie dort die kleinen Hilfs-Ziffern eintragen.

Würden Sie später zum Beispiel in Feld **6**, links neben der 1, eine 5 eintragen können, so käme die große 3 sicher in das andere Feld mit der kleinen Hilfs-3. Denn Sie hatten ja schon festgestellt, dass die 3 in Feld 6 nur in einem der beiden Kästchen mit den kleinen Hilfs-3ern stehen kann. Wenn eins entfällt, wissen Sie sicher, dass es das andere sein muss - genau das macht Sie scheller als alle anderen Löser.

5		2			3			
4	6			7		9		3
		3	4					
9	5			6	₄	₃		
	4			3		₅	9	
₃	₃			9	₄	₅₃	1	7
₃	₃	₅₄			7	2		₁
		9		4		₁	3	5
		₅₄	3			7		6

Erkenntnis...

In diesem Bild ist schon nach der 4 gesucht worden – leider ohne direkten Treffer. Ein paar Hilfs-Ziffern für die 4 konnten wir aber markieren.

Jetzt kommt die 5 an die Reihe. In Feld 6 und in Feld 7 ergeben sich wieder je zwei Möglichkeiten, die kleinen Hilfs-Ziffern werden dort eingetragen. Feld 7 birgt zudem eine Besonderheit, die Ihnen bei fast jedem Sudoku eine große Hilfe sein kann. Sie wissen jetzt, dass in Feld 7 die 5 oder die 4 über oder unter der 9 stehen müssen. Was Sie damit automatisch auch wissen: An diesen beiden Positionen kann keine andere Zahl stehen! Den Vorteil sehen Sie im nächsten Bild.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

...und Nutzen

Hier sind die möglichen Kästchen für die Ziffer 6 weiß dargestellt. In Feld 7 gibt es eigentlich drei Positionen für die 6, doch da feststeht, dass das Kästchen über der 9 nur eine 4 oder 5 enthalten kann, bleiben für die 6 nur die beiden linken weißen Kästchen. Hier sehen Sie zum ersten Mal den enormen Vorteil der kleinen Hilfs-Ziffern.

Doch es kommt noch besser: Sie wissen ja nun, dass die 6 in Feld 7 in der **linken** senkrechten Spalte stehen muss. Das heißt aber für Feld 4: Die 6 kann nur in die **rechte** senkrechte Spalte eingetragen werden.

5		2			3			
4	6			7		9		3
		3	4					
9	5			6	₄	₃		
	4			3		₅	9	
₃	₃			9	₄	₅₃	1	7
₆₃	₃	₅₄			7	2		₁
₆		9		4		₁	3	5
		₅₄	3			7		6

Ausschluss...

Auch in Feld **2** und **6** bleiben für die 6 nur jeweils zwei Plätze, wie Sie sehen.

In Feld **6** helfen Ihnen die kleinen Hilfs-Ziffern jetzt ganz besonders: Wie bei der 4 und 5 in Feld **7** müssen in Feld **6** die 5 und die 6 auf jeden Fall in diese beiden Kästchen! Also kann die 3 dort nicht stehen; ihr bleibt folgerichtig nur der Platz darüber – die nächste Ziffer ist gefunden!

5		2	₆		3			
4	6			7		9		3
		3	4		₆			
9	5			6	₄	₃		
	4	₆		3		₆₅	9	
₃	₃	₆		9	₄	₆₅₃	1	7
₆₃	₃	₅₄			7	2		₁
₆		9		4		₁	3	5
		₅₄	3			7		6

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5		2	₆		3		₇	
4	6			7		9		3
		3	4		₆		₇	
9	5		₇	6	₄	3		
	4	₆	₇	3		₆₅	9	
₃	₃	₆		9	₄	₆₅	1	7
₆₃	₃	₅₄			7	2		₁
₆₇	₇	9		4		₁	3	5
		₅₄	3			7		6

...und Folgerung

In diesem Bild wurden die kleinen Hilfs-Ziffern für die 7 eingetragen. Es scheint so, als könnten Sie sich in Feld **4** nicht auf nur zwei Felder festlegen, da es dort nach drei Möglichkeiten aussieht. Da die 7 aber in Feld **1** nicht zwischen der 2 und der 3 stehen darf und in Feld **7** in derselben Spalte auch kein Platz mehr frei ist, muss die 7 in Feld **4** in eines der beiden Kästchen rechts neben der 5 und der 4 eingetragen werden.

Das liegt schlicht daran, dass in jeder Zeile und jeder Spalte eine 7 stehen muss. Oben (**1**) geht nicht, unten (**7**) geht nicht – es bleibt nur die Mitte übrig.

5		2	6		3		7	
4	6			7		9		3
		3	4		6		7	
9	5	7	7	6	4	3		
	4	67	7	3		65	9	
	3	3	6		9	4	65	1
63	3	54			7	2		1
67	7	9		4		1	3	5
		54	3			7		6

Keine Acht...

Vielleicht ist es Ihnen schon aufgefallen: Es ist keine einzige 8 vorhanden! Kümmern wir uns also um die 9 – und damit geht es nun Schlag auf Schlag. Passen Sie gut auf: In Feld 9 bleibt für die Ziffer 9 nur die Position über der 5. Da hier auch eine kleine Hilfs-1 steht, wissen Sie jetzt, wo die große 1 hinkommt – zwischen die 2 und die 7.

In Feld 8 ergibt sich durch Ihre erste gefundene 9 (in Feld 9), dass die 9 nur noch in das untere Kästchen eingetragen werden kann.

Im nächsten Bild ist alles vermerkt.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

...doch alle Neune

In Feld 2 ist nur noch ein einziger Platz für die 9 möglich: links oben. Dort steht auch eine kleine Hilfs-6, die jetzt nicht mehr stimmen kann. Damit kommt die 6 nach rechts unten.

In Feld 1 muss unsere letzte 9 nun natürlich in das Feld neben der 3, denn die oberste Zeile hat ihre 9 schon in Feld 2. Jetzt haben Sie alle 9en gefunden.

5		2	6		3		7	
4	6			7		9		3
		3	4		6		7	
9	5	7	7	6	4	3		
	4	67	7	3		65	9	
	3	3	6		9	4	65	1
63	3	54			7	2		9
67	7	9		4		1	3	5
		54	3		9	7		6

Kreuz und Quer

Das Grundgerüst steht nun. Betrachten Sie bitte jetzt das Feld **9**. Durch Abzählen können Sie herausfinden, welche Zahlen fehlen: 4 und 8. Diese haben Sie mit kleinen Hilfs-Ziffern eingetragen.

Für das Feld **6** bedeutet dies: die Ziffern 4 und 8 müssen über die 7. Denn die kleinen Hilfs-5en und Hilfs-6en blockieren die linke Spalte; die Mitte ist wegen der 4 und der 8 im Feld **9** nicht möglich. In Feld **4** steht schon eine 4 – somit wissen Sie, **wie** die 4 und die 8 ins Feld **6** kommen, oder?

5		2	9		3		7		
4	6			7		9		3	
	9	3	4		6		7		
9	5	7	7	6	4	3			
	4	67	7	3		65	9		
	3	3	6		9	4	65	1	7
63	3	54			7	2	84	9	
67	7	9		4		1	3	5	
		54	3		9	7	84	6	

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5		2	9		3	4	7		
4	6			7		9		3	
	9	3	4		6	8	7		
9	5	7	7	6	4	3		4	
	4	67	7	3		65	9	8	
	3	3	6		9	4	65	1	7
63	3	54			7	2	84	9	
67	7	9		4		1	3	5	
		54	3		9	7	84	6	

Von 1 bis 9

In Feld **3** ergibt sich daraus, dass die 4 und die 8 in der linken Spalte stehen müssen. Da durch die 4 in Feld **2** die untere Zeile blockiert ist, muss die 4 über die 9 in Feld **3** geschrieben werden; die 8 fügen Sie darunter ein. Beide Ziffern sind im linken Bild schon eingetragen.

Wissen Sie jetzt auch, welche Ziffer in Feld 6 noch fehlt? Zählen Sie nach!

Durch abzählen können Sie danach auch erkennen, welche zwei Ziffern sich zu der 7 senkrecht in Feld **3** gesellen müssen.

5		2	9		3	4	7		
4	6			7		9		3	
	9	3	4		6	8	7		
9	5	7	7	6	4	3	2	4	
	4	67	7	3		65	9	8	
	3	3	6		9	4	65	1	7
63	3	54			7	2	84	9	
67	7	9		4		1	3	5	
		54	3		9	7	84	6	

Kleine Zahlen...

Genau – die 2 fehlte noch in Feld 6. Und in der grauen Spalte suchen wir nach den Ziffern 5, 6 und 7. Diese drei Ziffern müssen also in Feld 3. Bei dem was Sie bisher gelernt haben, wissen Sie bestimmt auch schon wo!

Die 6 muss nach oben, denn die beiden 6en in Feld 1 und 2 blockieren die anderen Reihen. Anhand der kleinen Hilfs-Ziffern sehen Sie, dass die 7 dann nach unten kommt. Bleibt für die 5 nur die Mitte.

Es geht voran!

1	2	3
4	5	6
7	8	9

...große Wirkung

In Feld 3 fehlten Ihnen noch zwei Ziffern, die 1 und die 2. Die 2 musste nach unten, da sonst in der oberen waagerechten Zeile von Feld 1 nach Feld 3 zwei 2er gewesen wären – Ihr erstes Feld ist jetzt komplett ausgefüllt!

Schauen Sie nun in die graue Zeile. Dort fehlen noch die 1 und die 5. Da in Feld 1 schon eine 5 vorhanden ist, muss die 1 nach links und die 5 zwischen 4 und 6 in Feld 2.

5		2	9		3	4	6	1	
4	6			7		9	5	3	
	9	3	4		6	8	7	2	
9	5	7	7	6	4	3	2	4	
	4	67	7	3		65	9	8	
	3	3	6		9	4	65	1	7
63	3	54			7	2	84	9	
67	7	9		4		1	3	5	
		54	3		9	7	84	6	

Riesenschritte...

In Feld **1** fehlen 7 und 8. Sicher fällt es Ihnen mittlerweile nicht mehr schwer, die richtigen Kästchen zu finden.

In Feld **2** bleibt danach nur eine Möglichkeit für die 8, doch für die dann noch fehlenden Ziffern 1 und 2 in Feld **2** müssen Sie vorerst kleine Hilfs-Ziffern eintragen.

In Feld **5** können Sie jetzt auch die 4 festlegen!

Auf dem nächsten Bild ist alles eingetragen.

5		2	9		3	4	6	1
4	6			7		9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	₇	₇	6	₄	3	2	4
	4	₆₇	₇	3		₆₅	9	8
₃	₃	₆		9	₄	₆₅	1	7
₆₃	₃	₅₄			7	2	₈₄	9
₆₇	₇	9		4		1	3	5
		₅₄	3		9	7	₈₄	6

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5	7	2	9	8	3	4	6	1
4	6	8	₁₂	7	₁₂	9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	₇	₇	6		3	2	4
	4	₆₇	₇	3		₆₅	9	8
₃	₃	₆		9	4	₆₅	1	7
₆₃	₃	₅₄			7	2	₈₄	9
₆₇	₇	9		4		1	3	5
		₅₄	3		9	7	₈₄	6

...über alle Hürden

Schauen Sie jetzt in die mittlere senkrechte Spalte: Es fehlen nur zwei Ziffern. Es ist leicht, die 1 und die 2 zuzuweisen, stimmt's?

Danach können Sie auch sicher sagen, wo die 1 in Feld **7** hingehört, oder?

In demselben Feld **7** sind für die 2 dann noch zwei Plätze möglich, die Sie wieder mit kleinen Hilfs-Ziffern markieren.

5	7	2	9	8	3	4	6	1
4	6	8	₁₂	7	₁₂	9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	₇	₇	6		3	2	4
	4	₆₇	₇	3		₆₅	9	8
₃	₃	₆		9	4	₆₅	1	7
₆₃	₃	₅₄		1	7	2	₈₄	9
₂₆₇	₂₇	9		4		1	3	5
		₅₄	3	2	9	7	₈₄	6

Frage der Logik

Und wieder nutzen Sie die kleinen Hilfs-Ziffern in Feld 7, denn Sie sind jetzt sicher, dass die 2 und die 7 auf jeden Fall links neben der 9 stehen müssen. Das heißt aber auch: die kleine Hilfs-6 dort kann nicht stimmen!

Die 6 kommt also in das Feld mit der anderen kleinen Hilfs-6. Dadurch können Sie ganz einfach auch die 6 in Feld 8 bestimmen – links neben der 4.

Ist Ihnen aufgefallen, dass in Feld 1 eine 7 in der mittleren Spalte steht? Feld 7 ist also fast vollständig.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Logische Antwort

In Feld 8 fehlen also nur noch die Ziffern 5 und 8. Sicher erkennen Sie jetzt auf einen Blick, wo diese genau hin müssen. Dadurch können Sie auch die angrenzenden Felder 7 und 9 komplett auffüllen. In Feld 7 gehören die fehlenden Ziffern 1 und 8 in die beiden freien Felder links unten.

Jetzt haben Sie es fast geschafft. War doch gar nicht so schwer, oder?

5	7	2	9	8	3	4	6	1
4	6	8	₁₂	7	₁₂	9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	₇	₇	6		3	2	4
	4	₆₇	₇	3		₆₅	9	8
₃	₃	₆		9	4	₆₅	1	7
6	3	₅₄		1	7	2	₈₄	9
7	2	9	6	4		1	3	5
		₅₄	3	2	9	7	₈₄	6

Zwischenspurt

Jetzt gibt es keine ideale Reihenfolge mehr, denn Sie stehen kurz vor dem Ziel! Tragen Sie in Feld **4** die 3 und dann die 2 ein. Danach wissen Sie welcher Platz der **2** in Feld **5** bleibt und Sie können dadurch auch Feld **2** fertigstellen.

Wissen Sie eigentlich, dass dieses Sudoku von mittlerer Schwierigkeit ist?

5	7	2	9	8	3	4	6	1
4	6	8	₁₂	7	₁₂	9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	₇	₇	6		3	2	4
	4	₆₇	₇	3		₆₅	9	8
₃	₃	₆		9	4	₆₅	1	7
6	3	4	5	1	7	2	8	9
7	2	9	6	4	8	1	3	5
8	1	5	3	2	9	7	4	6

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5	7	2	9	8	3	4	6	1
4	6	8	1	7	2	9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	₇	₇	6		3	2	4
2	4	₆₇	₇	3		₆₅	9	8
3		₆	2	9	4	₆₅	1	7
6	3	4	5	1	7	2	8	9
7	2	9	6	4	8	1	3	5
8	1	5	3	2	9	7	4	6

Fast alles belegt

In der mittleren senkrechten Spalte der Felder **1**, **4** und **7** fehlt nur noch die 8. Nach dem Eintragen sehen Sie, wo die letzte 8 – zu Beginn hatten Sie gar keine! – in Feld **5** ihren Platz findet.

Jetzt können Sie sicher die letzten beiden verbliebenen 7en unterbringen.

Und wo die 5 in Feld **5** ihren Platz hat, steht eigentlich auch schon länger fest.

5	7	2	9	8	3	4	6	1
4	6	8	1	7	2	9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	7	8	6		3	2	4
2	4	₆	7	3	5	₆₅	9	8
3	8	₆	2	9	4	₆₅	1	7
6	3	4	5	1	7	2	8	9
7	2	9	6	4	8	1	3	5
8	1	5	3	2	9	7	4	6

Zielgerade und...

Nun muss die 5 in Feld **6** natürlich in die Ecke und die 6 darüber. Jetzt tragen Sie noch schnell die drei letzten Ziffern ein und fertig!

1	2	3
4	5	6
7	8	9

...Fertig!

Herzlichen Glückwunsch! Sie haben es geschafft. Auch wenn Sie zwischendurch vielleicht ins Schwitzen gekommen sind und das eine oder andere mehrfach lesen mussten: Sie haben jetzt das Rüstzeug, jedes leichte und mittelschwere Sudoku zu lösen.

Bei den schweren Varianten geht es manchmal nicht weiter, ohne ein wenig zu spekulieren. Sie müssen sich für eine von mehreren Möglichkeiten entscheiden und falls Sie sich dabei verlaufen, den Rückweg genau merken, dann werden Sie jedes Sudoku sicher lösen können.

5	7	2	9	8	3	4	6	1
4	6	8	1	7	2	9	5	3
1	9	3	4	5	6	8	7	2
9	5	7	8	6	1	3	2	4
2	4	1	7	3	5	6	9	8
3	8	6	2	9	4	5	1	7
6	3	4	5	1	7	2	8	9
7	2	9	6	4	8	1	3	5
8	1	5	3	2	9	7	4	6

