Thomas Weth, Nürnberg

Ortslinien als Hilfsmittel zur Problemlösung

Geometrie besteht im Unterricht aus verschiedensten Teilgebieten wie Formenkunde, Messen, Abbildungen, Zeichnen und Konstruieren, Beweisen, Raumgeometrie usw. Seit der Verfügbarkeit dynamischer Geometriesysteme und anderer spezieller Geometrieprogramme wird versucht, den Einfluss des Computers beim Erlernen der Inhalte zu analysieren und zu erforschen. Der folgende Beitrag reiht sich in diese Forschungsrichtung ein und möchte einen Beitrag zur Analyse liefern, welchen Einfluß der Computereinsatz speziell auf das Unterrichtsziel Beweisen zu liefern vermag. Eine weitere Spezialisierung erfolgt dahingehend, dass sich die folgende Diskussion auf eine einzige Beweisstrategie beschränkt. Dabei soll gezeigt werden, dass der Computer beim Unterrichtsziel Beweisen nicht „nur“ das Entdecken von Vermutungen, das Visualisieren und Verifizieren von Beweisgedanken, sondern insbesondere auch das Generieren von Beweisideen zu unterstützen vermag. Die im Folgenden diskutierte „n-1-Strategie“ erlangt eine besondere didaktische Bedeutung, da sie

- Beweisideen generiert und damit eine heuristische Funktion übernimmt und
- Beweise als notwendigen Bestandteil von Konstruktionsaufgaben verwendet und damit Konstruieren und Beweisen in eine enge und dem Schüler „natürlich“ erscheinende Beziehung zueinander stellt.

1. Die „n-1“ – Strategie

Eine bestimmte Art von geometrischen Konstruktionsaufgaben lässt sich in allgemeinster Form mit folgender Aufgabenstellung charakterisieren:

Gesucht ist ein Objekt, welches n gegebene Bedingungen erfüllt.

Eine typische Konkretisierung ist beispielsweise die Aufgabe:
Gegeben sind drei zueinander parallele Geraden a,b,c. Zu konstruieren ist ein Quadrat ABCD mit $A \in a$, $B \in b$ und $C \in c$.
Das zu konstruierende Objekt muss also insgesamt 4 Bedingungen[1] erfüllen:
(1) Das Viereck muss quadratisch sein.

[1] Es sei darauf hingewiesen, dass die Anzahl der Bedingungen, welche das zu konstruierende Objekt erfüllen muss, nicht scharf einzugrenzen ist. So könnte man die Anzahl der Bedingungen bei der vorliegenden Aufgabe etwa formal alleine dadurch schon erhöhen, dass man statt (1) fordert: (a) $AB=AD$,(b) $BC=CD$, (c) $\sphericalangle(ABC) = 90^0$, usw. Für das Anwenden der „n-1“-Strategie ist aber nur wichtig, dass man sich überhaupt für eine feste Anzahl von Bedingungen entschieden hat.

(2) A∈a.
(3) B∈b.
(4) C∈c.

Eine Möglichkeit bzw. heuristische Strategie, die zum Erfolg führen *kann*, ist die

„n-1“-Strategie:

1.Schritt: Wähle eine der n Bedingungen aus und konstruiere ein Objekt, das alle, bis auf diese eine Bedingung (also: n-1) erfüllt.
2. Schritt: Betrachte die Ortslinie des „n-ten“ Punktes[2] (der die geforderte Bedingung *nicht* erfüllt), die sich ergibt, wenn man einen der anderen Konstruktionspunkte - unter Erfüllung aller n-1 sonstigen Bedingungen – bewegt[3].
3. Schritt: Gewinne (im Idealfall) aus der Ortslinie einen Hinweis auf eine erfolgreiche Konstruktionsidee.

1.1 Erster Lösungsversuch für die Quadrataufgabe

Beim einzupassenden Quadrat wäre es z.B. möglich, die Bedingung (1) „Das Viereck muss quadratisch sein“ zunächst zu vernachlässigen und statt dessen ein Rechteck zu konstruieren.
Es wäre also bei gegebenen Parallelen a,b,c ein Rechteck ABCD zu konstruieren mit A∈a, B∈b, C∈c (vgl. Abb. 1)

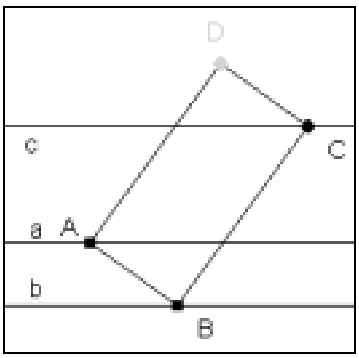


Abbildung 1

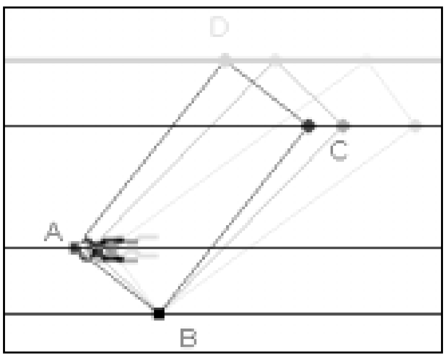


Abbildung 2

[2] ... oder eigens konstruierter Hilfspunkte (vgl. unten) ...
[3] Dem Autor ist klar, dass es in strengem Sinne nicht möglich ist, **einen** Punkt zu bewegen: streng genommen handelt es sich um verschiedene Punkte in verschiedenen Lagen. Mit Rücksicht auf bessere Verständlichkeit (und in Einklang mit üblichen Sprechweisen) wird aber im folgenden diese Ungenauigkeit in Kauf genommen.

Bewegt man dann z.B. A auf a entlang, so durchläuft D eine Ortslinie, die aussieht, als wäre sie eine Parallele zu c. Einen direkten Hinweis auf die Lösung der Konstruktionsaufgabe erhält man dadurch allerdings in diesem Falle noch nicht.
Um mehr heuristische Hinweise zu erhalten, konstruiert man (versuchsweise) etwa einen Punkt E auf AD, der von A die selbe Entfernung besitzt, wie B.
Betrachtet man nun zusätzlich noch die Ortslinie von E beim Variieren von A auf a, so erhält man (anscheinend) eine weitere Gerade (vgl. Abb.3). Bewegt man A so, dass D Schnittpunkt der beiden Ortslinien wird, so hat man ein Lösungsquadrat (Abb. 4 und 5).

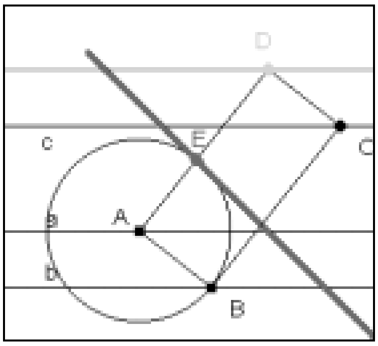


Abbildung 3

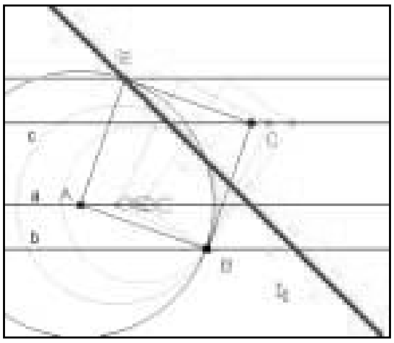


Abbildung 4

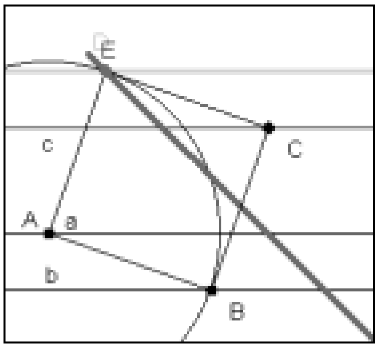


Abbildung 5

Hat man also die beiden Geraden, so konstruiert man zu deren Schnittpunkt D und dem (unbewegten) Punkt B das zugehörige Quadrat (BD ist die Diagonale im Quadrat, woraus dieses sich konstruieren lässt).
Problematisch ist also in diesem Falle der Nachweis, dass die beobachteten Ortslinien auch wirklich Geraden sind und welche Lage (Entfernungen, Winkel, ...) diese Geraden bezüglich der unbewegten Objekte B, a, b, c einnehmen.
Ohne auf die Lösung an dieser Stelle näher einzugehen[4], sei noch angedeutet, dass sich andere (evtl. einfachere) Lösungshinweise bei einer „geeigneteren“ Wahl der n-ten (zu vernachlässigenden) Bedingung ergeben.

1.2 Zweiter Lösungsversuch für die Quadrataufgabe

Ausgehend von der ursprünglichen Aufgabenstellung wird nun ein Quadrat konstruiert, das alle gestellten Bedingungen bis auf „(4) $C \in c$“ erfüllt.
Variiert man dann wieder A auf a, so erhält man anscheinend als Ortslinie von C eine Gerade, welche senkrecht auf a steht. Der Schnittpunkt dieser Ortslinie mit c würde einen Punkt C liefern, der mit dem (unbewegten) Punkt B zwei benachbarte Punkte des gesuchten Quadrats bildet.

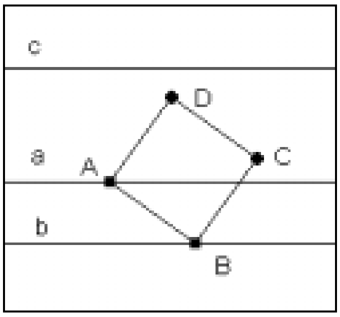


Abbildung 6

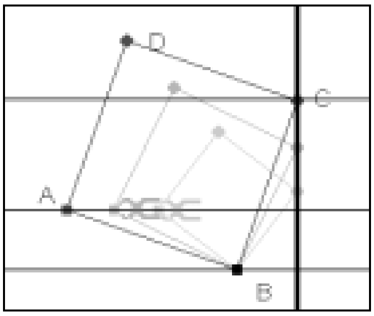
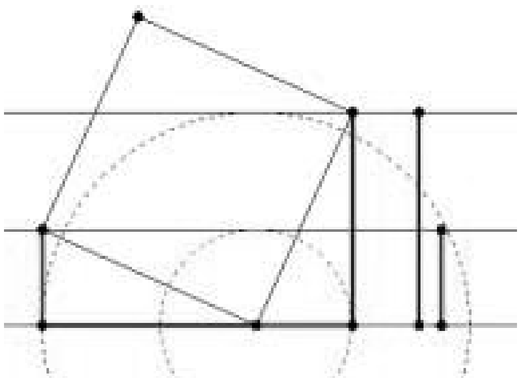


Abbildung 7

Die Konstruktion der vermeintlichen Geraden ist denkbar einfach, denn die Ortslinie ist das Bild der Geraden a bei einer 90^0-Drehung um B; C kann als Bildpunkt von A unter der genannten Abbildung interpretiert werden, und da A alle Punkte einer Geraden durchläuft, durchläuft C alle Punkte der Bildgeraden.
Wie im diskutierten Beispiel gezeigt werden sollte, liefert die „n-1"-Strategie unter Umständen Lösungshinweise für bestimmte Konstruktionsaufgaben, auf die man ohne die erzeugten Ortslinien evtl. nur schwer gestoßen wäre. Die mathematische Aktivität bei der Strategie verlagert sich von der eigentlichen Konstruktionsaufgabe (die durch Anwenden der entsprechenden Ortslinien bewältigt werden kann) hin zu der Interpretation der Ortslinien und der mathematischen Verifikation der Vermutungen.

1.3 Eine Anmerkung zur „Stabilität" der Lösungen



Ausser dass die n-1-Strategie oftmals eine konkrete Lösungsidee zu liefern vermag, erzeugt sie erfahrungsgemäß auch „stabile" Lösungen in folgendem Sinne: Obige Aufgabe hätte auch durch die „klassische" Strategie Planfigur-Analysis-Konstruktion-Determination gelöst werden können. Eine Lösungsidee ergibt sich aus der Kongruenz der in nebenstehender Figur eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke. Modifiziert man allerdings die ursprüngliche Aufgabenstellung dahingehend, dass die Parallelität der drei gegebenen Geraden entfällt, liefert die „klassische" Lösung unbrauchbare Ergebnisse, während die durch die „n-1"-Strategie gewonnene Lösung weiterhin voll gültig, in diesem Sinne also stabil, bleibt.

[4] Die Ortslinie durch D ist wirklich eine Parallele zu c, welche zu c denselben Abstand hat, wie a zu b (denn C wird nach Konstruktion längs des Vektors BA verschoben). Die Ortslinie von E ist eine Gerade, welche sich als Bild von a unter einer Drehstreckung um B um 45^0 und Streckfaktor $\sqrt{2}$ ergibt.

2. Merkwürdige Dreieckslinien und die n-1-Strategie

Im Folgenden soll die vorgestellte heuristische Strategie auf folgende Klasse von Konstruktionsaufgaben angewandt werden:

> Gegeben sind drei Geraden a,b,c, die sich in einem Punkt schneiden. Zu konstruieren ist ein Dreieck ABC, in dem diese Geraden

2.1 Mittelsenkrechten,
2.2 Höhen,
2.3 Seitenhalbierende,
2.4 Winkelhalbierende sind.

2.1 Das Mittelsenkrechtenproblem: Zu drei gegebenen Mittelsenkrechten ist ein Dreieck zu konstruieren

Gegeben sind drei kopunktale Geraden a,b,c. Gesucht ist ein Dreieck ABC mit den Mittelsenkrechten a,b,c.
Als Bedingungen zur Anwendung der n-1-Strategie verwenden wir im Folgenden
(1) das zu konstruierende Objekt ist ein Dreieck.
(2) a ist Mittelsenkrechte zu BC,
(3) b ist Mittelsenkrechte zu AC,
(4) c ist Mittelsenkrechte zu AB.
In einer ersten Lösung 2.1.1 verwenden wir als n-te (vernachlässigte) Bedingung „(3) b ist Mittelsenkrechte zu AC".
In einer zweiten Lösung 2.2.2 wird „(1) Das zu konstruierende Objekt ist ein Dreieck." zur vernachlässigten n-ten Bedingung.

2.1.1 Konstruktion eines Dreiecks, bei dem zwei der gegebenen Geraden Mittelsenkrechte sind

Da die Punkte A,B,C auf einem Kreis mit Mittelpunkt U (dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden) liegen müssen, eignet sich folgende Konstruktion:
Zeichne einen beliebigen Kreis um den Schnittpunkt der drei Geraden und wähle einen Punkt A auf der Kreislinie[5]. Spiegle A an c, der Bildpunkt ist B. Spiegle B an a; der Bildpunkt ist C. Wenn der Mittelpunkt M von AC auf b läge, läge eine Lösungskonfiguration vor.

[5] Wenn hier und im Folgenden vom „freien Wählen" eines Punktes die Rede ist, wird stillschweigend vorausgesetzt, dass hierbei keine triviale und/oder unpassende Wahl getroffen wird.

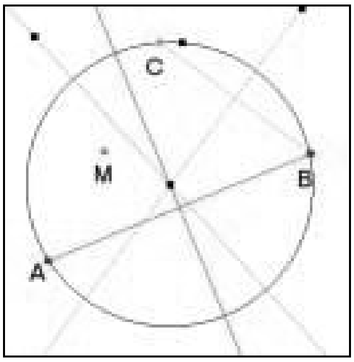


Abbildung 8

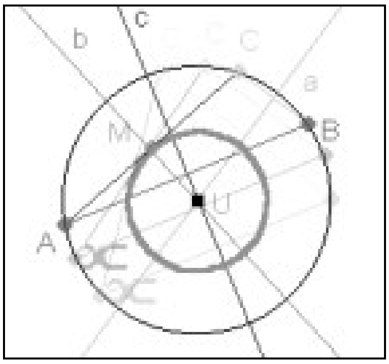


Abbildung 9

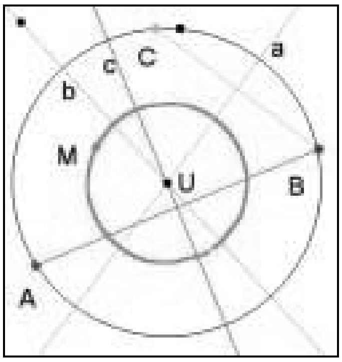


Abbildung 10

Im zweiten Schritt (vgl. oben) bewegt man A auf der Kreislinie und es ergibt sich als Ortslinie von M anscheinend ein zum Umkreismittelpunkt konzentrischer Kreis.
Eine Konstruktionsidee für das gesuchte Dreieck ergibt sich daraus also folgendermaßen:
Angenommen die Ortslinie von M ist ein Kreis. Dann schneide man diesen Kreis mit b. Das Lot auf b durch den Schnittpunkt schneidet einen beliebigen Kreis um U dann in den Punkten A und C des gesuchten Dreiecks. Den dritten Dreieckspunkt B erhält man dann, indem man A an c (oder C an a) spiegelt.
Zum Nachweis, dass die Ortslinie von M ein Kreis um U ist, sei an drei geometrische Sätze erinnert:

Hilfssatz 1:
Stehen die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht aufeinander, so sind sie kongruent oder ergänzen sich zu 180^0.

Hilfssatz 2 (Umkehrung des Umfangswinkelsatzes):
Schneiden die Schenkel gleich großer Winkel α_1 und α_2, deren Scheitel auf einem Kreis liegen, die Kreislinie, so sind die Schnittpunkte der Schenkel jeweils gleich weit voneinander entfernt.

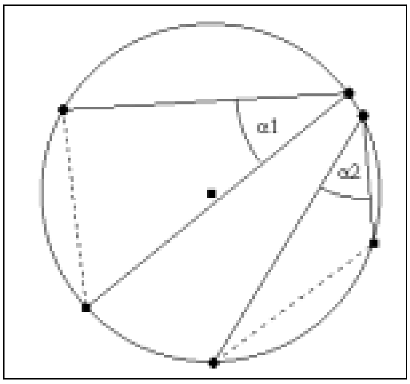


Abbildung 11

Hilfssatz 3:
Die Mittelpunkte gleich langer Kreissehnen haben vom Kreismittelpunkt gleichen Abstand.[6]

[6] Begründung: Verbindet man die Endpunkte der gleich langen Sehnen mit dem Kreismittelpunkt erhält man kongruente gleichschenklige Dreiecke. Diese stimmen insbesondere in der Länge ihrer Höhen auf die Basis (die gleich langen Sehnen) überein, welche in gleichschenkligen Dreiecken identisch mit den Mittelsenkrechten zur Basis sind.

Zur Konstruktion des Kreises, der die gesuchte Ortslinie von M darstellt, geht man folgendermaßen vor:
Um U zeichnet man einen Kreis mit beliebigem Radius. Durch U konstruiert man das Lot auf c. Dieses schneidet die Kreislinie in A´ und B´. B´ wird an a gespiegelt und liefert den Punkt C´. Der Mittelpunkt von A´ und C´ ist M´. Der Kreis k(U,M´) schneidet b im gesuchten Punkt M.

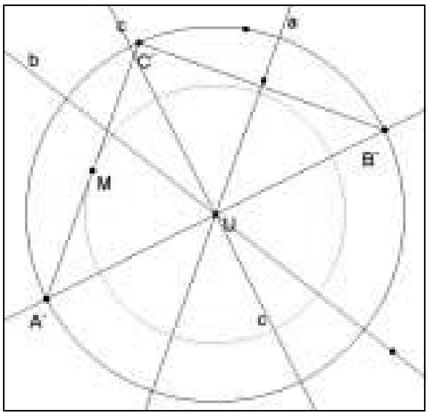


Abbildung 12

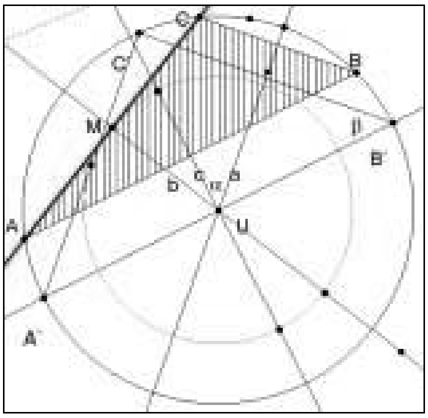


Abbildung 13

Beweis der Konstruktion:
Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt U und beliebigem Radius und ein Peripheriepunkt A´.
Spiegelt man A´ an c, so liegt der Bildpunkt B´ auch auf der Kreislinie, da die Symmetrieachse den Kreismittelpunkt U enthält. Spiegelt man B´ an a, so liegt der Bildpunkt C´ analog auch auf der Kreislinie. Nach Hilfssatz 1 ist der Winkel A´B´C´ kongruent zum Schnittwinkel von a und c (vgl. in Abb. 13 die Winkel α und ß.) a und c sind also Mittelsenkrechten im Dreieck A´B´C´. Da der Winkel A´B´C´ unabhängig von der Lage von A´ auf der Kreislinie immer gleich groß ist, hat nach Hilfssatz 2 die Strecke A´C´ immer konstante Länge. Bewegt sich also A´ auf der Kreislinie, so haben die Mittelpunkte von A´C´ nach Hilfssatz 3 von U immer gleiche Entfernung, liegen also auf einem Kreis um U.
Der Schnittpunkt dieses Kreises mit b sei M.
Zeichnet man nun senkrecht zu b durch M eine Kreissehne, erhält man die Endpunkte A und C, und b ist damit Mittelsenkrechte zu AC. Spiegelt man A an c erhält man B und c ist Mittelsenkrechte zu AB. Spiegelt man B an a, so erhält man den Bildpunkt C´´, und a ist Mittelsenkrechte zu BC´´. Zu zeigen bleibt, dass C´´ = C.
Nach Konstruktion sind die Winkel ABC´´ und ABC kongruent. Damit sind die zugehörigen Kreissehnen AC´´ und AC gleich lang. Also ist C´´ = C; die zweite mögliche Kreissehne scheidet aus Orientierungsgründen aus.

2.1.2 Konstruktion eines Vierecks, bei dem drei der gegebenen Geraden Mittelsenkrechte sind

In der zweiten Lösung werden die drei Geraden als Mittelsenkrechten von drei Seiten eines Vierecks verwendet. Die zunächst konstruierte Figur ist also kein Drei- sondern ein Viereck; damit ist die n-te (vernachlässigte) Bedingung „(1) Die zu konstruierende Figur ist ein Dreieck.“

Konstruktion der zu variierenden Figur:
Gegeben seien die drei Geraden a,b,c durch U. A sei ein Punkt auf einem Kreis um U.
Spiegelt man A an c, erhält man B (der auf der Kreislinie liegt, da die Symmetrieachse c durch den Kreismittelpunkt verläuft). Spiegelt man B an a, erhält man den Kreispunkt C´´.
Spiegelt man A an b, erhält man den Kreispunkt C´. Insgesamt hat man damit ein (evtl. überschlagenes) Viereck ABC´´C´, bei dem a,b,c Mittelsenkrechten zu den Seiten AB, BC´´ und AC´ sind.

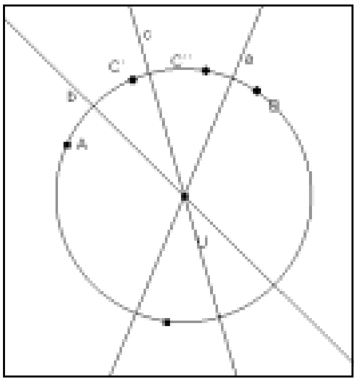


Abbildung 14

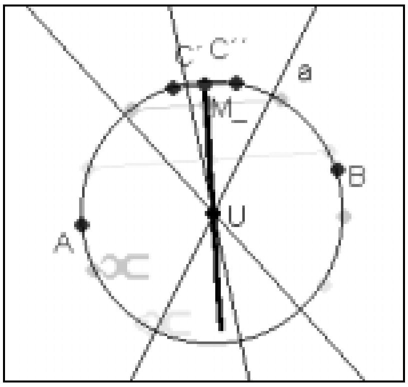


Abbildung 15

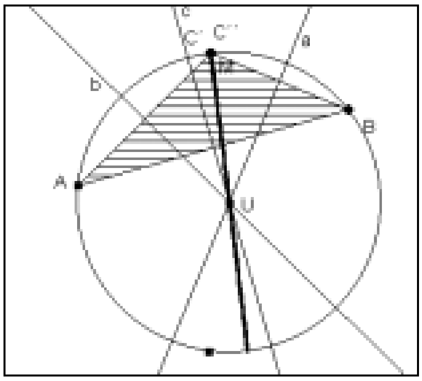


Abbildung 16

Der Mittelpunkt M von C´ und C´´ scheint sich auf einer Geraden durch U zu bewegen. Hat man diese Gerade, ist man fertig.
Denn dann nimmt man den Endpunkt dieser Geraden - in diesem Punkt fallen C´ und C´´ zusammen - als Eckpunkt C, spiegelt C an b und erhält A, spiegelt A an c und erhält B. (Spiegelt man B an a, so erhält man wieder C.) Die Geraden a,b,c sind also Mittelsenkrechten im Dreieck ABC.
Zur Begründung der Konstruktion ist also zu zeigen:
Die Ortslinie von M beim Bewegen von A auf der Kreislinie ist eine Gerade g durch U.
Und: Der Schnittpunkt von g mit der Kreislinie ist der Punkt C, der durch Spiegelung an b und a die Punkte A und B eines der gesuchten Dreiecks liefert.

Der Nachweis gelingt mit folgenden Schritten:

1. Die Punkte A, B, C´ und C´´ liegen auf dem Kreis um U.

B ist nach Konstruktion der Bildpunkt von A bei einer Achsenspiegelung an c. Deshalb haben (1) A und B von jedem Achsenpunkt gleiche Entfernung; insbesondere von U. Also liegt B auch auf dem Kreis um U durch A.

(2) C´´ ist Bildpunkt von B bei Spiegelung an a. Also hat C´´ gleiche Entfernung von U wie B, liegt also wegen (1) auch auf dem Kreis um U durch A.

(3) C´ ist Bildpunkt von A bei Spiegelung an b. Also liegt auch C´ auf dem Kreis um U durch A.

Wegen (1), (2) und (3) liegen alle Punkte auf dem Kreis um U durch A.

2. Der Mittelpunkt von C´ und C´´ liegt auf einer Geraden, deren Schnittpunkt mit dem Kreis um U durch A einen Eckpunkt C des gesuchten Dreiecks liefert.

(1) Da A durch die Spiegelung an C auf B abgebildet wird und B anschließend durch Spiegelung an a auf C´´ abgebildet wird, geht A insgesamt durch eine Drehung um U in C´´ über: $A \xrightarrow{S_c} B \xrightarrow{S_a} C'' \Rightarrow A \xrightarrow{D_\alpha} C''$ wobei α der doppelte Schnittwinkel von a und c ist[7].

(2) A wird durch Spiegelung an b auf C´ abgebildet: $A \xrightarrow{S_b} C'$.

(1´) Die Hintereinanderausführung der Achsenspiegelungen an c und a lässt sich (unter Beibehaltung von Schnittpunkt U und Schnittwinkel) ersetzen durch eine Hintereinanderausführung von Achsenspiegelungen an b und einer Geraden a´: $A \xrightarrow{S_b} \; \xrightarrow{S_{a'}} C''$ mit $\sphericalangle(b,a') = \sphericalangle(c,a)$.

Mit (2) folgt: $A \xrightarrow{S_b} \xrightarrow{S_{a'}} C'' = C' \xrightarrow{S_a} C''$ also liegen C´ und C´´ achsensymmetrisch bzgl. a´.

Also liegt M als Mittelpunkt von C´ und C´´ auf der Geraden a´.

Fällt C´ mit C´´ zusammen, ist C´ und C´´ Achsenpunkt auf a´. Da C´´ und C´ außerdem auf dem Kreis um U durch A liegen, ist der Punkt C Schnittpunkt von a´ mit der Kreislinie.

Damit erhält man folgende Konstruktionsvorschrift für das gesuchte Dreiecks ABC: Übertrage unter Beibehaltung des Scheitels U den Winkel (c,a) so, dass b erster Schenkel des Winkels wird. Der zweite Schenkel a´ schneidet den Kreis im Punkt C des gesuchten Dreiecks. Spiegelung von C an b liefert den Eckpunkt A des gesuchten Dreiecks. Spiegelung von A an C (oder von C an a) liefert den Eckpunkt B des gesuchten Dreiecks.

Mit 2.1.1 und 2.1.2 liegen zwei unterschiedliche Vorgehensweisen innerhalb der n-1-Strategie vor, mit welcher das Problem, die drei gegebenen Geraden zu Mittelsenk-

---

[7] Hier wird der Satz verwendet, dass sich die Hintereinanderausführung zweier Achsenspiegelungen durch eine Drehung (oder Verschiebung) ersetzen lässt.

rechten eines zu konstruierenden Dreiecks zu machen, gelöst werden kann. Im Folgenden soll der Versuch beschrieben werden, dieses Vorgehen auf die Probleme der Höhen, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden anzuwenden.

2.2 Das Höhenproblem: Zu drei gegebenen Höhen ist ein Dreieck zu konstruieren.

Gegeben sind drei kopunktale Geraden ha, hb, hc[8]. Gesucht ist ein Dreieck ABC mit den Höhen ha, hb, hc.
Als Bedingungen zur Anwendung der n-1-Strategie verwenden wir im Folgenden:
(1) das zu konstruierende Objekt ist ein Dreieck,
(2) ha ist Höhe durch A,
(3) hb ist Höhe durch B,
(4) hc ist Höhe durch C.

In Analogisierung des erfolgreichen Vorgehens im Falle der Mittelsenkrechten verwenden wir in einer ersten Lösung 2.2.1 als n-te (vernachlässigte) Bedingung „(3) b ist Höhe durch B".
In einer zweiten Lösung 2.2.2 wird entsprechend „(1) Das zu konstruierende Objekt ist ein Dreieck" zur vernachlässigten n-ten Bedingung.

2.2.1 Konstruktion eines Dreiecks, bei dem zwei der gegebenen Geraden Höhen sind

Konstruktion:
C wird beliebig auf hc gelegt. Von C aus werden die Lotgeraden zu ha und hb konstruiert.
Das Lot von C auf hb schneidet die Höhe ha in A.
Von A wird das Lot auf hc und von C aus das Lot auf ha konstruiert.
Der Schnittpunkt dieser beiden Lotgeraden sei B. Wenn B auf der Geraden hb liegt, liegt eine Lösungskonfiguration vor.

[8] Aus Gründen der Konvention verwenden wir für die gegebenen Geraden hier statt a, b, c die Bezeichnungen ha, hb und hc. Entsprechend werden wir in den folgenden Kapiteln für die Winkel- und Seitenhalbierenden verfahren.

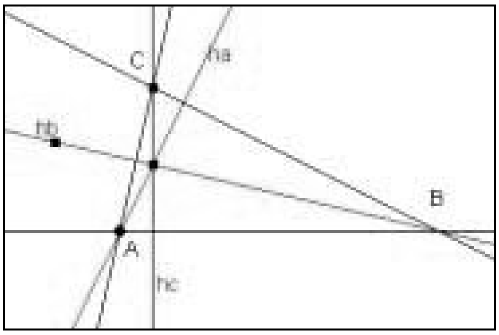


Abbildung 17

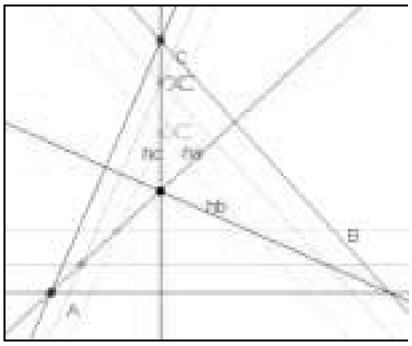


Abbildung 18

Entsprechend der n-1-Strategie bewege man C auf hc und beobachte die Ortslinie von B.

Überraschenderweise liegt unabhängig von der Lage von C immer eine Lösungskonfiguration vor. Mit anderen Worten: die Ortslinie von B ist die Gerade hb.

Begründung:

Nach Konstruktion sind AC, AB und CB Geraden, welche senkrecht stehen auf hb, hc und ha. ha und hc sind also Höhen im Dreieck ABC, da A nach Konstruktion auf ha und C auf hc liegen. Die Gerade durch B und den Schnittpunkt von hc und ha ist eine Höhe im Dreieck ABC mit den Höhen ha, hb und hc.

Die Gerade hb, welche nach Konstruktion senkrecht auf AC steht und durch den Schnittpunkt von hc und ha geht, ist demnach ebenfalls eine Höhe in einem Dreieck mit den Höhen ha, hb und hc.

hb ist demnach identisch mit dem Lot durch B auf AC. Also liegt B auf hb.

Auf Grund dieser überraschenden Erkenntnis ist es in diesem Falle gar nicht möglich, die oben intendierte (naiv angestrebte) zweite Lösungsidee, die drei Geraden als „Höhen in einem Viereck" zu verwenden. Statt dessen birgt die „Höhenproblematik" eine zweite Überraschung: Sie liefert nämlich eine weitere Konstruktion für die Mittelsenkrechtenproblematik aus 2.1.

2.2.2 Verwendung der Höhenkonstruktion zur Lösung des Mittelsenkrechtenproblems

Die in 2.2.1 gefundene Lösung lässt sich mit folgendem Satz zur Konstruktion eines Dreiecks verwenden, das die gegebenen Geraden nicht als Höhen, sondern als Mittelsenkrechten besitzt.

Satz: In einem Dreieck ABC sind die Mittelsenkrechten identisch mit den Höhen des Seitenmittendreiecks A´B´C´.

Um zu drei gegebenen kopunktalen Geraden a,b,c demnach ein Dreieck zu konstruieren, welches a,b,c als Mittelsenkrechten besitzt, interpretiert man a,b,c zunächst als Höhen und konstruiert gemäß obiger Konstruktion in 2.2.1 ein Dreieck A´B´C´. Konstruiert man nun zu A´B´C´ ein Dreieck ABC, bei dem A´B´C´ Seitenmittendreieck ist, so sind a,b,c Mittelsenkrechten in diesem Dreieck.

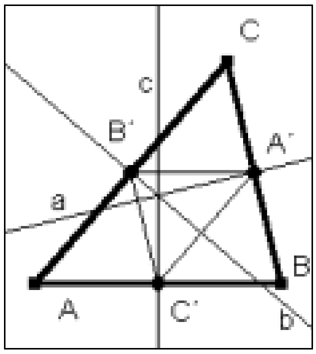


Abbildung 19

2.2.3 Zwei weitere Lösungen des Höhenproblems

In entsprechender Weise lassen sich in Umkehrung des Vorgehens die in 2.1.1 und 2.1.2 gewonnenen Lösungen des Mittelsenkrechtenproblems durch Bilden entsprechender Seitenmittendreiecke in Lösungen des Höhenproblems erweitern.

2.3 Das Seitenhalbierendenproblem: Zu drei gegebenen Seitenhalbierende ist ein Dreieck zu konstruieren

Gegeben sind drei kopunktale Geraden sa, sb, sc. Gesucht ist ein Dreieck ABC mit den Seitenhalbierenden sa, sb, sc.

Als Bedingungen zur Anwendung der n-1-Strategie verwenden wir im Folgenden:
(1) Das zu konstruierende Objekt ist ein Dreieck.
(2) sa ist Seitenhalbierende durch A.
(3) sb ist Seitenhalbierende durch B.
(4) sc ist Seitenhalbierende durch C.

In Analogie zum erfolgreichen Vorgehen im Falle der Mittelsenkrechten versuchen wir in einer ersten Lösung 2.3.1 ein Dreieck zu konstruieren, bei dem C auf sc liegt und sa und sb Seitenhalbierende sind – mit einem ähnlich überraschenden Ergebnis wie im Fall des Höhenproblems 2.2.1. Bei einem weiteren Lösungsversuch verwenden wir die Kenntnis, dass der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt (vgl. 2.3.2).

2.3.1 Konstruktion eines Dreiecks, bei dem zwei der gegebenen Geraden Seitenhalbierende sind

Konstruktion:
Auf sc wählt man einen beliebigen Punkt C. Da sb die Strecke CA halbieren muss, liegt A auf der Parallelen g zu sb im Abstand d(C,sb). Der Schnittpunkt von g mit sa ist A. Analog ergibt sich B als Schnittpunkt von sb mit der Parallelen h zu sa im Abstand d(C,sa).

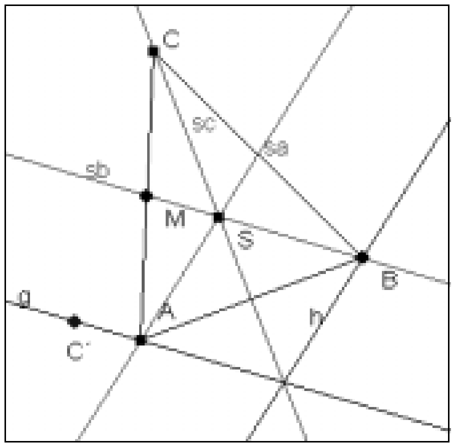


Abbildung 20

Damit erfüllt die Konstruktion alle Bedingungen, die notwendig sind, damit sa und sb Seitenhalbierende sind.
Gesucht wird nun die Konstellation, bei welcher zusätzlich der Mittelpunkt von AB auf sc liegt.
Variiert man dazu C (als einzigen „freien“ Punkt der Konstruktion) auf sc, so beobachtet man, dass – ähnlich wie dies bereits bei der ersten Lösung des Höhenproblems 2.2.1 der Fall war - die Ortslinie des Mittelpunkts von AB mit der gegebenen Geraden sc zusammenfällt.
Die obigen erfüllten Bedingungen waren also schon hinreichend für die Lösung.
Begründung:
Nach Konstruktion sind sa und sb Seitenhalbierende im Dreieck ABC. Dann aber ist auch die Gerade sc durch C und S (den Schnittpunkt von sa und sb) Seitenhalbierende (von AB) im Dreieck ABC.

2.3.2 Verwendung des Schnittpunktsatzes des Schwerpunkts

Die folgende Lösung stellt insofern eine Erweiterung der n-1-Strategie dar, als dem Lösungsversuch ein Objekt zugrunde liegt, das nur n-2 der geforderten Bedingungen erfüllt, denn das konstruierte Dreieck erfüllt nicht die Bedingungen „sb ist Seitenhalbierende von AC“ und nicht „B liegt auf sb“. Eine Analyse der Konstruktion zeigt allerdings, dass sich diese beiden Forderungen gegenseitig bedingen.
Konstruktion:
Lege A und C willkürlich auf sa bzw. sc. Mb sei der Mittelpunkt von AC. Mb wird am Schnittpunkt S von sa und sb zentrisch mit Faktor –2 gestreckt und liefert den Eckpunkt B eines Dreiecks ABC (bei dem sb keine Seitenhalbierende ist).
Bemerkung: Da S nach Konstruktion die Strecke BMb im Verhältnis 2:1 teilt, sind AS (also sa) und CS (also sc) „automatisch“ Seitenhalbierende im Dreieck ABC.

Variiert man nun A so auf sa, dass Mb auf sb liegt, dann muss B (als Bildpunkt einer zentrischen Streckung durch S) auch auf sb liegen.

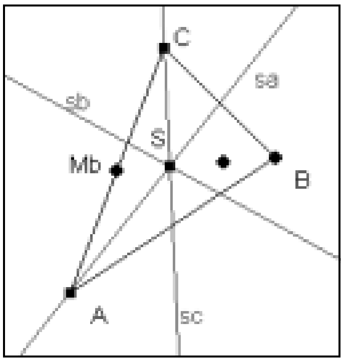


Abbildung 21

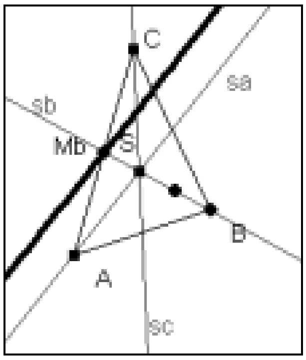


Abbildung 22

Beim Variieren von A auf sa beobachtet man nur: Mb bewegt sich anscheinend auf einer Parallelen zu sa. Schneidet man diese Parallele mit sb erhält man die richtige Lage von Mb. Durch zentrische Streckung an S mit Faktor –2 erhält man B auf sb.
Die Ortslinie von Mb beim Variieren von A auf sa ist tatsächlich eine Gerade, da Mb die Strecke AC halbiert, und damit Mb auf der Mittelparallele zu sa und der Parallelen zu sa durch C liegt.

2.4 Das Winkelhalbierendenproblem: Zu drei gegebenen Winkelhalbierenden ist ein Dreieck zu konstruieren.

Gegeben sind drei kopunktale Geraden wa, wb, wc. Gesucht ist ein Dreieck ABC so, dass wa, wb und wc Winkelhalbierende sind.
Als Bedingungen zur Anwendung der n-1-Strategie verwenden wir im Folgenden:
(1) Das zu konstruierende Objekt ist ein Dreieck.
(2) wa ist Winkelhalbierende durch A.
(3) wb ist Winkelhalbierende durch B.
(4) wc ist Winkelhalbierende durch C.

In einem ersten Lösungsversuch 2.4.1 werden wir als n-te Bedingung „(4) wc ist Winkelhalbierende durch C“ vernachlässigen. Eine zweite Lösungsidee verwendet die Symmetrieeigenschaften der Winkelhalbierenden und führt als Konstruktionsfigur zu einem Viereck, vernachlässigt also „(1) Das zu konstruierende Objekt ist ein Dreieck“ (vgl. 2.4.2). Wie sich zeigen wird, verlassen wir mit dieser Konstruktion die Menge der Geraden und Kreise als Ortslinien.

2.4.1 Konstruktion eines Dreiecks, bei dem zwei der gegebenen Geraden Winkelhalbierende sind

Konstruktion:
A und C werden zunächst willkürlich auf wa bzw. wb positioniert. Spiegelt man nun AB an wb und AB an wa, so ergibt sich als Schnittpunkt der Bildgeraden ein Punkt C und im Dreieck ABC sind wa und wb Winkelhalbierende. Damit erfüllt ABC alle Forderungen an das gesuchte Dreieck, außer der einen, dass wc auch Winkelhalbierende ist.

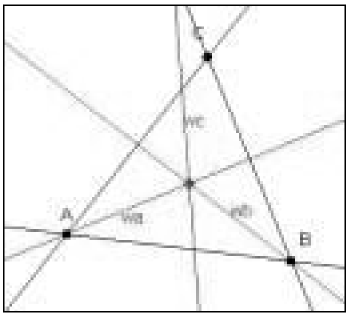


Abbildung 23

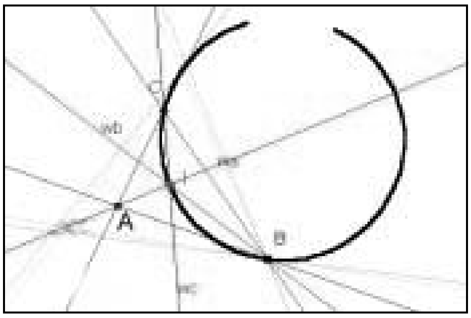


Abbildung 24

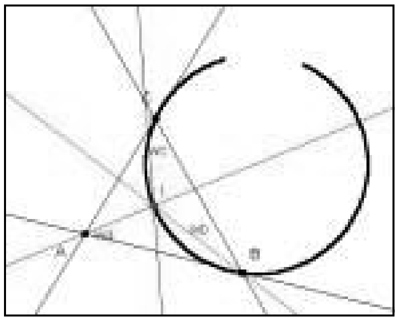


Abbildung 25

Bewegt man A auf der Geraden wa entlang, so bewegt sich C anscheinend auf einem Kreis, auf dem der Schnittpunkt I der gegebenen Geraden und der Eckpunkt B des Dreiecks liegt.
Hätte man diesen Kreis - wenn es sich überhaupt um einen handelt – so könnte man durch ihn die Lage von C und B gleichzeitig gewinnen (als Schnitt des Kreises mit wc bzw. wb) und durch Spiegelung der Geraden BC an wb und wc den Eckpunkt A auf wa.

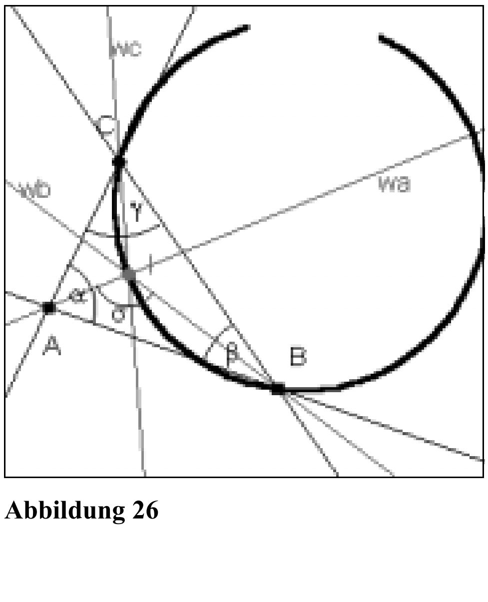


Abbildung 26

Mit Hilfe einer Lösungskonstellation wie in Abb. 26 erkennt man, dass sich C tatsächlich auf einem Kreis bewegt und man erhält einen Hinweis, um welchen Kreis es sich handelt.
Denn C liegt nach Konstruktion auf dem Fasskreisbogen zur Strecke IB zum Winkel $\gamma/2$.
γ läßt sich durch den konstanten Winkel σ ausdrücken: Denn in Dreieck ABC gilt:

$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Und in Dreieck ABI gilt: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\sigma=180^0$; woraus folgt: $\frac{\gamma}{2}=\sigma-90^0$.

Damit erhält man die Konstruktionsvorschrift für das gesuchte Dreieck ABC:

Konstruiere zu einem beliebigen Punkt B auf wb den Fasskreisbogen zum Winkel $\frac{\gamma}{2} = \sigma - 90^0$ über der Strecke BI. Der Schnittpunkt des Kreises mit wc ist der gesuchte Eckpunkt C. Spiegelt man nun BC an wc (oder wb) so ergibt sich A als Schnittpunkt der gespiegelten Geraden mit wa.

2.4.2 Konstruktion eines Vierecks, bei dem die gegebenen Geraden Winkelhalbierende sind

Konstruktion:
Zunächst werden die Punkte A auf wa und B auf wb willkürlich gewählt. Die zu AB bzgl. wa symmetrische Gerade schneidet wc in C.
Die Gerade AC wird an wc gespiegelt und liefert die Gerade g.
Außerdem wird noch AB an wb gespiegelt und liefert die Gerade h.
g wird mit h geschnitten; der Schnittpunkt sei H.
Im Viereck ABHC sind nun die drei gegebenen Geraden wa, wb, wc Winkelhalbierende.

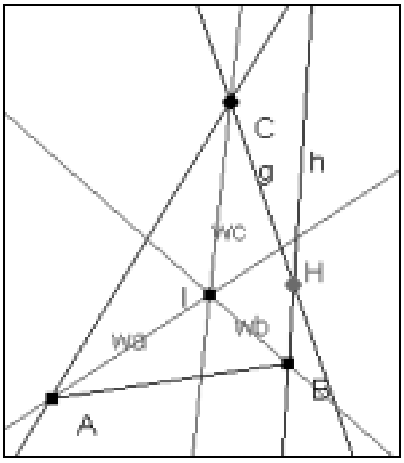


Abbildung 27

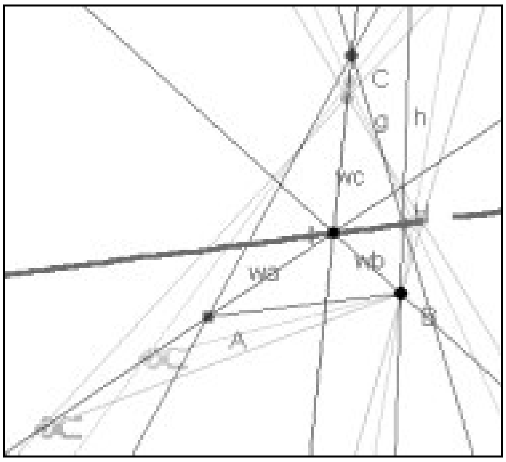


Abbildung 28

Wenn nun beim Variieren von A auf wa aus dem Viereck ABHC ein Dreieck wird (d.h. bei H ein gestreckter Winkel vorliegt), hat man eine Lösungskonfiguration.
Variiert man nun A auf wa, so scheint H eine Ortslinie zu beschreiben, welche eine Gerade durch I ist. Hätte man diese Gerade, so könnte man einen Punkt B frei auf wb wählen, und das Lot von B auf die Gerade HI konstruieren. Diese würde wc in C schneiden. Eine Achsenspiegelung von CB an wc würde (als Schnitt mit wa) den letzten Eckpunkt A eines Lösungsdreiecks ABC liefern.

Um zu zeigen, dass die Ortslinie von H eine Gerade durch I ist, benötigen wir (ohne Beweis) zunächst den

Hilfssatz: Wenn ein Viereck Tangentenviereck ist, dann schneiden sich die vier Innenwinkelhalbierenden in einem Punkt.

Nach Konstruktion besitzt das Viereck ABHC einen Inkreis, denn es gilt:
d(I,AB) = d(I,AC), denn I liegt auf der Winkelhalbierenden von ∢BAC.
d(I,CA) = d(I,CH), denn I liegt auf der Winkelhalbierenden von ∢HCA.
d(I,BA) = d(I,BH), denn I liegt auf der Winkelhalbierenden von ∢ABH.
Also gilt für den Abstand von I zu den Vierecksseiten:
d(I,BH) = d(I,AB) = d(I,AC) = d(I,CH) und damit gibt es einen Kreis, der alle vier Seiten berührt.
Deshalb gilt zunächst: (vgl. Abb. 29)

(1) $\lambda_1 = \lambda_2$

Wie „Experimente" und Winkelmessungen mit einem dynamischen Geometriesystem vermuten lassen, scheint es so zu sein, dass unabhängig von der Wahl von A, der Winkel μ_2 in folgender Abbildung immer gleich dem Winkel μ_1 ist. Wenn dem so ist, liegt H immer auf einer Geraden, nämlich dem Schenkel eines Winkels und dieser Winkel ist unabhängig von der Lage von A, ist also bereits durch die gegebenen drei Geraden wa, wb, wc determiniert.
Im folgenden wird gezeigt, dass in der konstruierten Konfiguration tatsächlich gilt: $\mu_1 = \mu_2$.

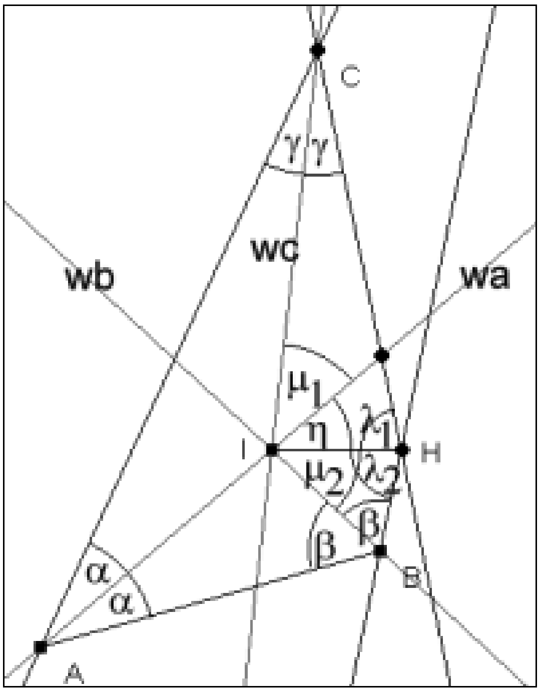


Abbildung 29

Denn die Innenwinkelsumme im Dreieck IBH liefert:

(2) $\mu_2 + \beta + \lambda_2 = 180^0 \Rightarrow (\text{mit}(1)): \quad \mu_2 + \beta + \lambda_1 = 180^0, \text{also}: \mu_2 + \beta = 180^0 - \lambda_2$

und in Dreieck ICH gilt:

(3) $\mu_1 + \eta + \gamma = 180^0 - \lambda_1$

Aus (2) und (3) ergibt sich: $\mu_2 + \beta = \mu_1 + \eta + \gamma$ bzw.:

(*) $\eta + \gamma - \beta = \mu_2 - \mu_1$

Nach dem Außenwinkelsatz gilt für Dreieck AIC:

(4) $\mu_1 = \alpha + \gamma$

und für Dreieck ABI:

(5) $\mu_2 = \alpha + \beta - \eta$

Subtraktion von (4) und (5) liefert:

(**) $\mu_1 - \mu_2 = \gamma - \beta + \eta$

Und mit (*) und (**) folgt schließlich:

$\mu_1 - \mu_2 = \mu_2 - \mu_1$ also $\mu_1 = \mu_2$.

Da demnach μ_2 unabhängig von der Lage von A, B oder C ist und ausschließlich vom Schnittwinkel μ_1 zwischen den gegebenen Winkelhalbierenden wa und wc abhängt, läßt sich die Ortslinie von H durch einfache Übertragung des Winkels μ_1 konstruieren. Wählt man einen beliebigen Punkt B auf wb und konstruiert das Lot von B auf die Ortslinie von H (die damit Winkelhalbierende eines 180^0-Winkels wird), so schneidet dieses Lot wc im gesuchten Punkt C. Achsenspiegelung von CB an wc liefert schließlich als Schnittpunkt mit wa den gesuchten Punkt A.

2.4.2.1 Lösungsvariante unter Verwendung eines Inkreises

Die Ortslinie von H, welche in 2.4.2 analysiert wurde, erlaubt folgende Variante zur Konstruktion einer Lösung des Winkelhalbierendenproblems:

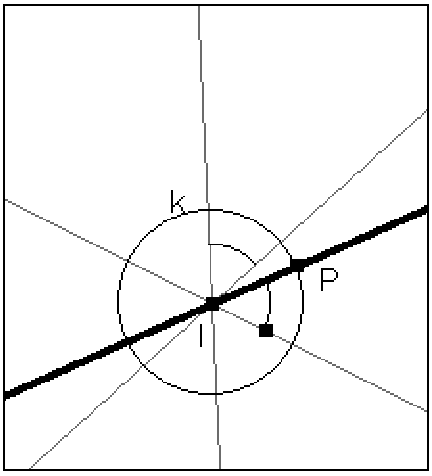


Abbildung 30

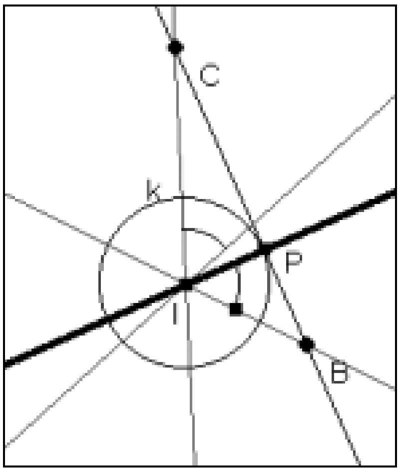


Abbildung 31

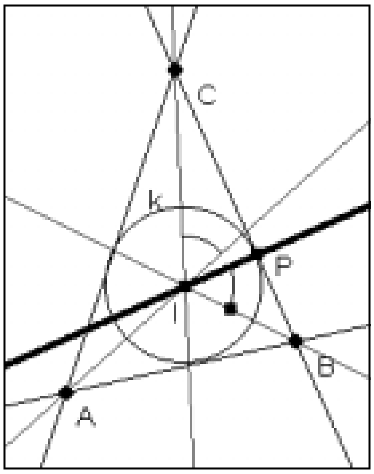


Abbildung 32

Durch Winkelübertragung konstruiert man die Ortslinie von H, also die Gerade IH. Mit I als Mittelpunkt zeichnet man einen Kreis k mit beliebigem Radius, der die Ortslinie in P schneidet. Zeichnet man die Tangente t an k in P, so schneidet t die gegebenen Geraden wc und wb in den Punkten C und B eines Lösungsdreiecks[9]. A ergibt sich durch Spiegeln von CB an wc und Schnitt mit wa.

[9] Alternativ könnte man P beliebig auf der Ortslinie wählen und das Lot durch P auf die Ortslinie verwenden.

2.4.3 Verwendung von beobachteten Invarianten zur Lösung

Die dynamische Abbildung in 2.4.2 deutet darauf hin, dass die Konfiguration beim Bewegen von A auf wa eine Invariante besitzt, denn alle Geraden AC scheinen durch einen gemeinsamen Punkt Ba (in Abb. 33) zu verlaufen; und ebenso die Geraden CH (nämlich durch Bac in Abb. 34).

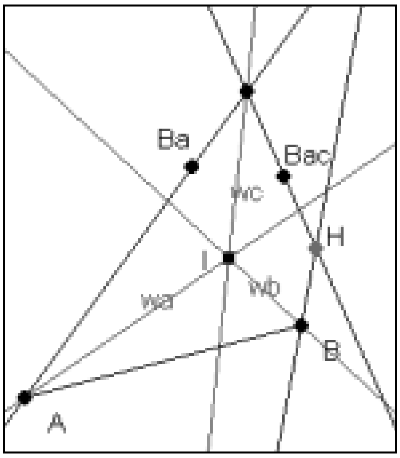


Abbildung 33

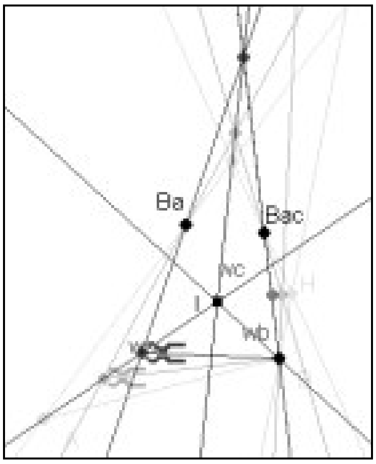


Abbildung 34

Diese Beobachtung lässt sich zu einer weiteren Lösung des Winkelhalbierendenproblems verwenden. Denn wäre Bac eine Invariante der Konstruktion, könnte man durch B und Bac eine Gerade konstruieren, welche wc in C schneidet. Wie oben liefert dann Spiegelung von CB an wc und Schnitt mit wa den dritten gesuchten Punkt A.

Zur Verifikation dieser Vermutung analysieren wir zunächst die Punkte Ba und Bac: Zur Konstruktion des Vierecks ABHC waren die Punkte A und B willkürlich auf wa und wb gewählt worden. Dann wurde AB an wa gespiegelt, indem A (als Achsenpunkt) fix blieb und B an wa gespiegelt wurde. Ba ist also der Bildpunkt von B bei Spiegelung von B an wa. Und damit ist klar, dass alle Bildgeraden von AB (unabhängig von der Lage von A) durch Ba verlaufen, da B und damit Ba ihre Lage nicht ändern, wenn A auf wa bewegt wird.

Entsprechend ist Bac der Bildpunkt von Ba bei Spiegelung an wc. Also verlaufen alle Geraden CH durch Bac. Und dies gilt auch für diejenige Gerade, welche C und B in einer Lösungskonfiguration verbindet. Immer liegen also die Punkte C, Bac und H auf einer Geraden. Liegt auch noch B auf dieser Geraden, so ist der Winkel bei H ein gestreckter und es liegt eine Lösung des Winkelhalbierendenproblems vor.

Wählt man also B beliebig auf wb und konstruiert durch Spiegeln an wa den Punkt Ba und anschließend durch Spiegeln von Ba an wc den Bildpunkt Bac, so kann man eine Gerade durch B und Bac zeichnen, welche wc in C schneidet. Spiegeln der Geraden BC an wb und Schnitt mit der Geraden wa liefert dann schließlich A, den dritten gesuchten Punkt eines Lösungsdreiecks ABC.

2.4.4 Konchoiden als Ortslinien beim Winkelhalbierendenproblem

Die bisherigen Darstellungen mögen suggerieren, dass die entstehenden Ortslinien üblicherweise Geraden oder Kreise sind. Dass dies nicht so sein muss, zeigt eine Lösungsidee zur Überprüfung eines gestreckten Winkels, welche im Laufe der Arbeit an 2.4.2 entstand. Um zu prüfen, ob bei H ein gestreckter Winkel vorliegt, kann man um H einen Kreis mit beliebigem Radius zeichnen, der die Schenkel der Geraden in P und Q schneidet (vgl. Abb. 35) . In dem Falle, in dem P und Q zusammenfallen, liegt ein gestreckter Winkel vor. Beobachtet man die Ortslinien von P und Q, so bilden die Berühr- oder Schnittpunkte der beiden Ortslinien mögliche Kandidaten für das Auftreten eines gestreckten Winkels bei H (vgl. Abb. 36).

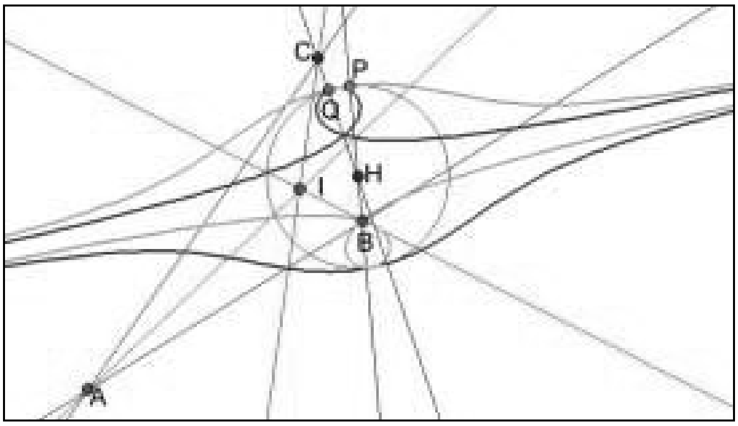


Abbildung 35

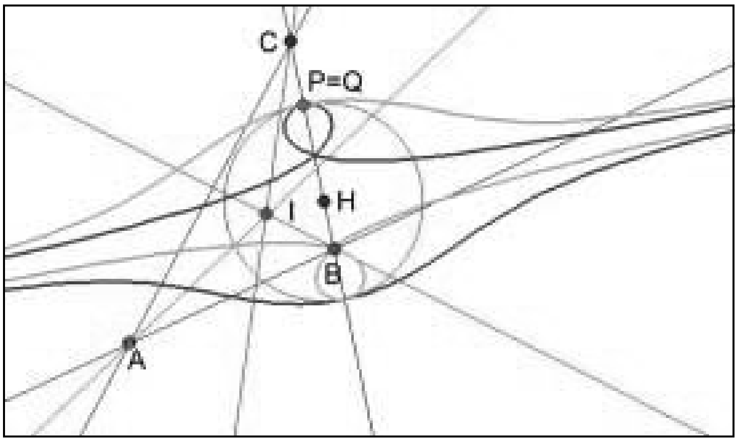


Abbildung 36

Die Ortslinien von P und Q sind sogenannte Konchoiden (Traktrices oder Schleppkurven), denn H bewegt sich auf einer Geraden (vgl. 2.4.2) und P und Q haben von H konstante Entfernung, wobei die Geraden HP bzw. HQ immer durch die festliegenden Punkte C bzw. B verlaufen. Und das ist genau eine (von mehreren) Konstruktionsmöglichkeit für Konchoiden.

Durch Einführen von Koordinaten ließen sich prinzipiell nun die Konchoidengleichungen und daraus die gemeinsamen Punkte berechnen und so eine weitere Lösung des Winkelhalbierendenproblems gewinnen. Dies würde den Rahmen dieser Arbeit allerdings sprengen.

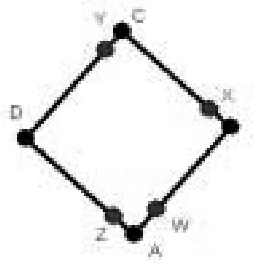
3. Weitere Aufgabenbeispiele

Trotz des oben angegebenen standardisierten Vorgehens benötigt die n-1-Strategie wegen einer geeigneten Auswahl der n-ten Bedinung, der Auswahl der zu beobachtenden Punkte und nicht zuletzt bei der Interpretation der Ergebnisse mathematisches „Gespür“ und Beobachtungsgabe. So sind es auch nicht immer die erzeugten Ortslinien, sondern u.U. auch Invarianzen, die beim Anwenden der n-1-Strategie zu Lösungsideen führen. Typisch für einen derartigen Fall ist die Aufgabe:

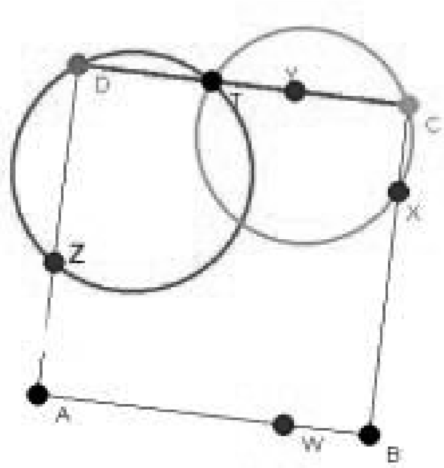
Gegeben seien die Punkte W,X,Y,Z.

Gesucht ist ein Quadrat A,B,C,D mit

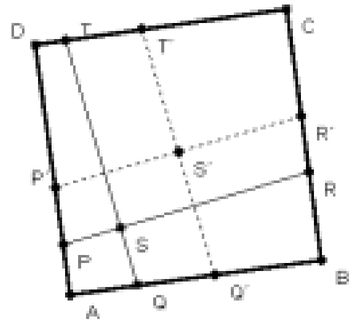
W∈AB, X∈BC, Y∈CD und Z∈DA.



Beim Anwenden der n-1 Strategie ist es naheliegend (und einfach) ein Quadrat zu konstruieren, bei dem nur drei der gegebenen Punkte auf den Seiten liegen. Beispielsweise wählt man eine Gerade durch W, konstruiert die Lote durch Z und X und ergänzt zu einem Quadrat. Im allgemeinen wird CD dieses Quadrats nicht den Punkt Y enthalten. Die Beobachtung von mehreren dieser Quadrate liefert nun die Erkenntnis, dass sich die Eckpunkte C und D auf Kreisen bewegen (das sind nicht die Thaleskreise über ZY oder XY!) (vgl. nebenstehende Zeichnung).



Allerdings liefern nicht diese Ortslinien den entscheidenden Lösungshinweis, sondern deren Schnittpunkt bzw. alleine der Punkt T, durch den alle wie oben konstruierten Quadrate verlaufen – unabhängig davon, ob auch Y auf CD liegt. Der Punkt T ist also eine Invariante der Konstruktion. Hätte man T, könnte man die Gerade TY zeichnen, von da aus die Lote durch X und Z. Ergänzen zum Quadrat müsste AB so liefern, dass AB den gegebenen Punkt W enthält. Was ist T nun für ein Punkt? Wie erhält man ihn? Durch Einzeichnen der Hilfslinie XZ gewinnt man die Vermutung, dass WT kongruent und senkrecht zu XZ ist. Damit kann man T aus X, Z und W gewinnen. Offen bleibt, ob T - wie beobachtet - auf allen Lösungsquadraten liegt und ob die „Lösung“ ein Quadrat (und nicht etwa ein Rechteck) liefert.



Eine Antwort auf diese Fragen liefert der Hilfssatz:

Mit den Bezeichnungen nebenstehender Figur gilt: Ein Rechteck ist genau dann ein Quadrat, wenn für die zueinander senkrechten Strecken QT und RP

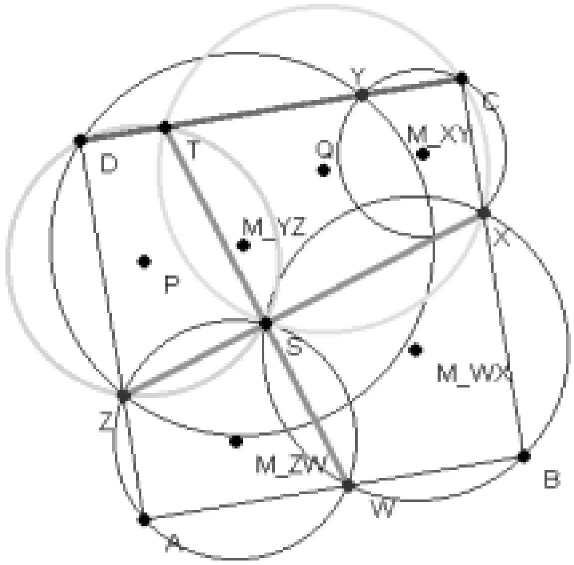
gilt, dass sie gleich lang sind.
(Die Schnittpunkte T,R,Q und P können dabei auch auf den Verlängerungen der Quadratseiten liegen.

Beweis:

Verschiebt man die zueinander senkrechten Geraden mit Schnittpunkt S so, dass S mit dem Mittelpunkt S´ des Quadrats zusammenfällt, dann gilt:
|TQ| = |T´Q´| und
|PR| = |P´R´|.
Dreht man T´Q´um 90^0 um S´, so gilt: T´Q´ = P´R´.
Insgesamt also: |TQ| = |T´Q´| = |P´R´| = |PR|

Mit diesem Hilfssatz gelingt nun die Lösung der Quadrataufgabe:

Gegeben seien die Punkte W,X,Y,Z.
Gesucht ist ein Quadrat A,B,C,D mit
W∈AB, X∈BC, Y∈CD und Z∈DA.
Lösung:
Zu gegebenen W,X,Y und Z konstruiere die Thaleskreise (auf denen die Eckpunkte des gesuchten Quadrats liegen müssen).
Nach obigem Hilfssatz kann man zu ZX auf der Halbgeraden WS einen Punkt T finden, der auf einer Quadratseite liegt.
Die Schnittpunkte C und D der Gerade TY mit den Thaleskreisen wählen wir als Eckpunkte des gesuchten Quadrats.



Zeichnet man DZ, so entsteht bei D ein rechter Winkel (da D auf dem Thaleskreis über ZY liegt).
Schnitt von DZ mit Thaleskreis über ZW liefert einen Punkt A.
Analog gelangt man zu B.
Verbinden von A bzw. von B mit W liefert jeweils rechte Winkel bei A bzw. B.
Bleibt zu zeigen, dass die Geraden AW und BW identisch sind.
2CD, die durch W geht.
Die Gerade BW ist (wegen der rechten Winkel bei C und B) ebenfalls eine Parallele zu CD, die durch W geht. Also ist AW gleich BW.

ABCD ist also ein Rechteck.
Da nach Konstruktion WT senkrecht zu ZX und ausserdem WT und ZX kongruent sind, folgt aus dem Hilfssatz, dass das Rechteck ABCD ein Quadrat ist.

4. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit wollte darstellen, dass die n-1-Strategie, die ganz wesentlich die dynamischen Möglichkeiten (Variieren von Konstruktionen, Erstellen von Ortslinien) moderner Computergeometriesysteme benutzt, eine Erweiterung des bisher zur Verfügung stehenden Beweis- und Methodenrepertoires liefert. Mit ihr als heuristischem Instrument wurden Lösungen für eine ganze Klasse von Aufgaben des Typs „Gegeben sind drei kopunktale Geraden. Gesucht ist ein Dreieck, in welchem die Geraden merkwürdige Linien sind“ gefunden, dargestellt und diskutiert. Wie gezeigt wurde, eröffnet die Strategie darüber hinaus Wege, manche der Lösungen in rein synthetische zu überführen; man denke hier etwa an die gefundenen Lösungen zum Höhen- und Seitenhalbierendenproblem oder an die Lösung des Winkelhalbierendenproblems in 2.4.3.
Bemerkenswert und charakteristisch für Lösungen, welche mit der n-1-Strategie gefunden werden, ist, dass es im Allgemeinen möglich ist, eine Konstruktion anzugeben, ohne zunächst zu wissen, *warum* sie richtig ist – beim synthetischen Vorgehen läuft die Entwicklung einer Konstruktionsidee und deren Verifikation dagegen eher parallel oder gleichzeitig ab. Die eigentliche mathematische Aufgabe beim Anwenden der n-1-Strategie liegt demnach nicht im *Finden* einer Lösungsidee – diese wird quasi „umsonst“ vom Computer geliefert –, sondern vielmehr in der Interpretation und Verifikation des am Bildschirm Beobachteten.
Letztlich bleibt also der mathematische Anspruch auch beim Computereinsatz voll erhalten. Allerdings liefert das beschriebene Vorgehen dem Problemlöser von Anfang an einen Erfolg versprechenden Weg und bewahrt ihn vor dem Beschreiten von Irrwegen und falschen Vermutungen, was bei den üblichen heuristischen Strategien nicht unbedingt gegeben ist; hier ist der Problemlöser oftmals auf seine Intuition und Erfahrung, kurz: sein mathematisches Gespür angewiesen. Insofern lässt sich der Computer bzw. dynamische Geometriesysteme in Verbindung mit der n-1-Strategie aus dieser Sicht als Hilfsmittel beim Entwickeln von mathematischem Gespür betrachten.